Scuole italiane all'estero (Europa) 2003 – Quesiti

QUESITO 1

Date un esempio di solido la cui superficie laterale è 7^{π} .

Ricordando che la superficie laterale di un cono circolare retto è: $S_l = \pi R a$, dove R è il raggio di base ed a l'apotema, possiamo assumere R=1 e quindi si deve avere:

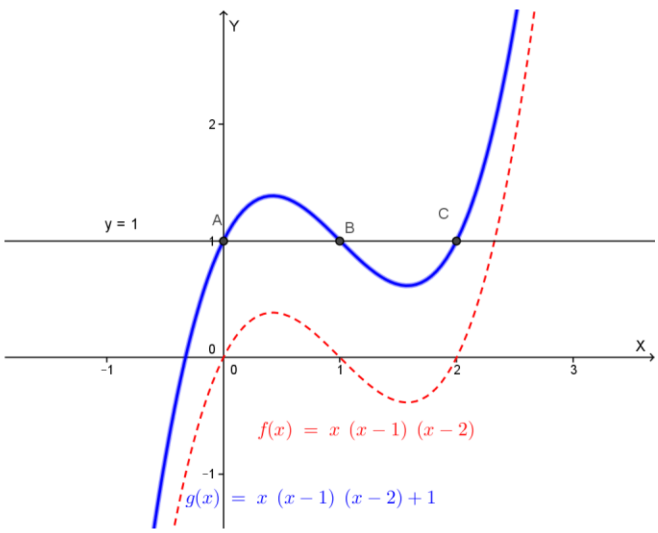
$$\pi R = 7^{\pi}, \quad R = \frac{7^{\pi}}{\pi}$$

Un possibile solido con la superficie laterale 7^{π} è quindi un conon circolare retto con apotema uguale ad 1 e raggio di base $\frac{7^{\pi}}{\pi}$.

QUESITO 2

Date un esempio di polinomio il cui grafico taglia la retta y=1 tre volte.

La funzione polinomiale $f(x) = x(x-1)(x-2)$ taglia l'asse x (retta di equazione y=0) nei tre punti di ascissa 0, 1 e 2. Effettuando una traslazione di vettore (0; 1) otteniamo la funzione $g(x) = x(x-1)(x-2) + 1$, che taglierà la retta di equazione y=1 nei tre punti (0; 1), (1; 1) e (2; 1).



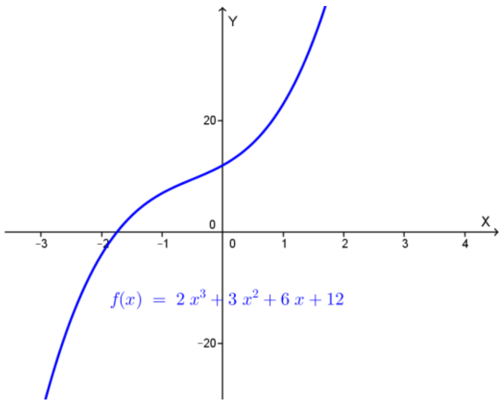
QUESITO 3

Dimostrate, senza risolverla, che l'equazione: $2x^3 + 3x^2 + 6x + 12 = 0$ *ammette una e una sola radice reale.*

Tutte le funzioni polinomiali di grado dispari ammettono ALMENO UNO ZERO; infatti sono funzioni continue ed i limiti a + infinito e – infinito sono +/- infinito e -/+ infinito rispettivamente.
Nel nostro caso poniamo $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 12$ e studiamone la monotonia:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + 6 > 0 \ \ per\ ogni\ x\ essendo\ \Delta < 0$$

La funzione è quindi sempre crescente perciò HA UN SOLO ZERO; ciò equivale a dire che l'equazione data ha una ed una sola radice.



QUESITO 4

Calcolate $D[arccot\ x]$ *(*D*= derivata) e dite perché essa è opposta a* $D[arctan\ x]$.

La funzione $y = \ arccot\ x$, è l'inversa di $x = cot\ y$; in base al teorema sulla derivata della funzione inversa si ha:

$$D[arccot\ x] = \frac{1}{D[\cot y]} = \frac{1}{-1 - \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2} = -D[arctan\ x]$$

Osserviamo che si può dimostrare (*) che $arccot\ x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$, quindi
$D[arccot\ x] = D\left[\frac{\pi}{2} - \arctan x\right] = -\ D[arctan\ x]$.

(*) Posto $\cot x = \alpha,\ si\ ha\ \ \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x = \alpha\ ,\ \frac{\pi}{2} - x = \arctan \alpha,$

$\frac{\pi}{2}\ - arc\ cot\alpha = arctan\ \alpha$ da cui: $arc\ cot\alpha = \frac{\pi}{2} -\ arctan\ \alpha.$

QUESITO 5

Scrivete l'equazione della tangente a λ *, grafico di* $f(x) = 2x - log\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$ *nel suo punto P di ascissa 0.*

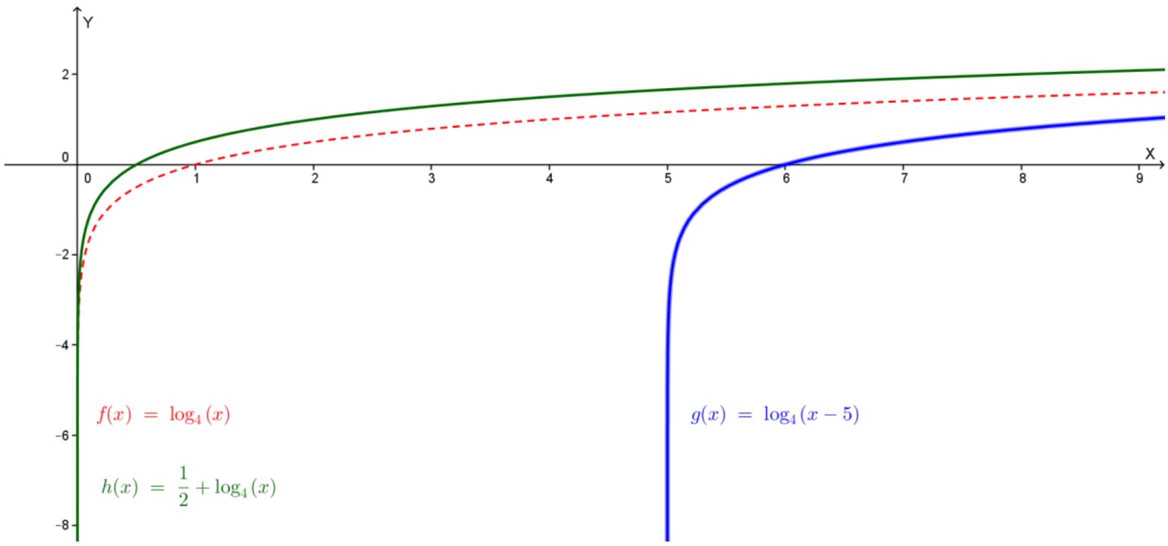
Risulta: $f'(x) = 2$, quindi, essendo $f(0) = \ -log\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$, la tangente richiesta ha equazione:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0), \quad y + log\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right) = 2x\,, \qquad y = 2x - log\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$$

QUESITO 6

Dopo aver tracciato il grafico della funzione $\log_4 x$*, come vi regolereste per tracciare il grafico della funzione* $\log_4(x-5)$ *? e quello della funzione* $\log_4 2x$ *?*

Il grafico di $\log_4(x-5)$ si ottiene da quello di $\log_4 x$ con una traslazione di vettore (5; 0)
Il grafico di $\log_4 2x = \log_4 2 + \log_4 x = \frac{1}{2} + \log_4 x$ si ottiene da quello di $\log_4 x$ con una traslazione di vettore $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.



QUESITO 7

Fra le primitive di $y = 3\cos^3 x$ *trovare quella il cui diagramma passa per* $P(0,5)$.

$$F(x) = \int 3\cos^3 x \quad dx = 3\int \cos x\,(\cos^2 x)\,dx = 3\int \cos x\,(1 - sen^2 x)dx =$$
$$= 3\int \cos x \;dx - 3\int \cos x \; sen^2 x\,dx = 3sen\,x - 3\left[\frac{1}{3}sen^3 x\right] + C =$$

$$= 3sen\,x - \; sen^3 x + C$$

Imponendo il passaggio per $P(0,5)$ otteniamo:

$5 = C$.

La primitiva richiesta ha quindi equazione: $y = 3sen\,x - \; sen^3 x + 5$.

QUESITO 8

Il coefficiente angolare della tangente al diagramma di f(x) è, in ogni suo punto P, uguale al doppio dell'ascissa di P. Determinate f (x) sapendo che f(0)=4.

Deve essere: $f'(x) = 2x$, quindi: $f(x) = x^2 + C$. Essendo f(0)=4 si ha: 4=C.

La funzione richiesta è quindi: $f(x) = x^2 + 4$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria