Scuole italiane all'estero (Europa suppletiva) 2003 – Quesiti

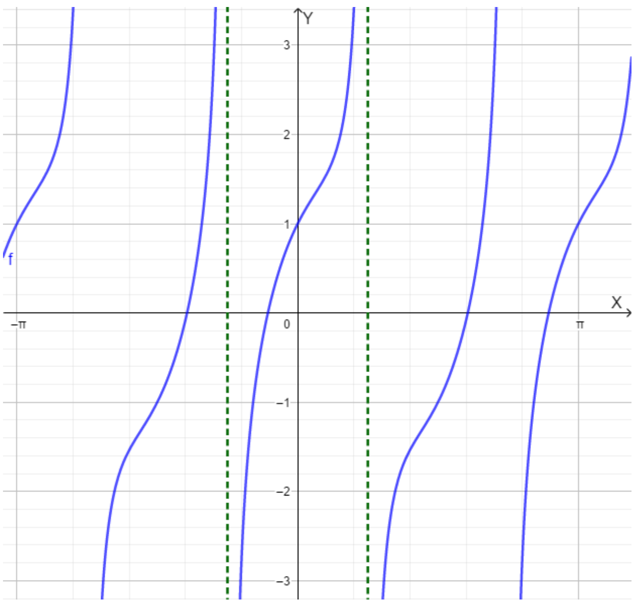
QUESITO 1

Cosa si intende per funzione periodica ? Quale è il Periodo della funzione $f(x) = tan(2x) + \cos 2x$*?*

Una funzione f(x) si dice periodica di periodo T se T è il più piccolo numero reale positivo tale che, per ogni x del suo dominio, risulti f(x)=f(x+T).

Se la funzione $g(x)$ è periodica di periodo T, $g(kx)$ è periodica con periodo $T' = \frac{T}{k}$. Inoltre il periodo della somma di due funzioni periodiche è uguale al minimo comune multiplo dei periodi delle due funzioni che la costituiscono. Nel nostro caso la funzione $tan(x)$ ha periodo $T = \pi$ quindi $tan(2x)$ avrà periodo $\mathrm{T}' = \frac{\pi}{2}$; la funzione $\cos x$ ha periodo $T = 2\pi$ quindi $cos\ (2x)$ avrà periodo $\mathrm{T}'' = \pi$. Il m.c.m. fra i due periodi è π.

Il periodo della funzione $f(x) = tan(2x) + \cos 2x$ è π.



QUESITO 2

Provate che se l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ *ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione* $3ax^2 + 2bx + c = 0$ *.*

Posto $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, il grafico della funzione ha almeno due soluzioni coincidenti in x=k, pertanto in tale punto abbiamo un massimo, un minimo o un flesso a tangente orizzontale. Essendo f una funzione razionale intera, è continua e derivabile su tutto R, quindi risulta $f'(k) = 0$; ma $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ pertanto l'equazione $3ax^2 + 2bx + c$ ammette k come radice.

Dimostrazione diretta:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ , \ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Dobbiamo quindi dimostrare che se f(x)=0 ha una radice doppia x=k, f'(x) ha una radice in x=k.
La funzione f può essere scritta nella forma:

$$f(x) = a(x-k)^2(x+h)$$

La sua derivata è:

$$f'(x) = 2a(x-k)(x+h) + a(x-k)^2 = a(x-k)(2x+2h+x-k)$$

E questa equazione si annulla per x=k, c.v.d.

QUESITO 3

Provate che la curva di equazione

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n}$$

Con a_0 e b_0 reali non nulli, ammette per asintoto la retta di equazione $y = \frac{a_0}{b_0}$.

Dobbiamo dimostrare che il limite della funzione, per x che tende all'infinito, è $\frac{a_0}{b_0}$.
Risulta infatti (tenendo conto degli infiniti "dominanti" al numeratore e al denominatore):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^n} = \frac{a_0}{b_0}$$

QUESITO 4

Quale è il flesso della funzione $e^x - x^2$?

Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda della funzione $f(x) = e^x - x^2$, che è ovunque definita e derivabile quanto si vuole.

$f'(x) = e^x - 2x \ , \quad f''(x) = e^x - 2 \geq 0 \quad se \ \ x \geq \ln 2$

Il grafico quindi volge la concavità verso l'alto se $x > \ln 2$ e verso il basso se $x < \ln 2$:

$x = \ln 2$ è punto di flesso. L'ordinata del flesso è: $f(ln2) = 2 - ln^2 2$.

Il flesso ha quindi coordinate: $F = (ln2, 2 - ln^2 2)$.

QUESITO 5

Provate che una qualsiasi curva di equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *presenta uno e un solo flesso e che questo è il centro di simmetria della curva.*

Calcoliamo la derivata prima e la derivata seconda:

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \ , \quad y'' = 6ax + 2b = 0 \quad se\ x = -\frac{b}{3a}$$

La curva in questione (cubica) è continua e derivabile su tutto R quanto si vuole; la derivata seconda si annulla in uno ed un solo punto (notiamo che a non può annullarsi, altrimenti non avremmo più una cubica) e che cambia il segno in un intorno del punto stesso: per esempio se a>0 risulta $y'' > 0\ per\ x > -\frac{b}{3a}$ $e\ y'' < 0\ per\ x < -\frac{b}{3a}$. Quindi il punto $x = -\frac{b}{3a}$ è punto di flesso (ed è unico). Troviamo l'ordinata:

Se $x = -\frac{b}{3a}$ si ha $y = -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^2}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d$. Effettuiamo la simmetria rispetto al flesso:

$$x \to 2\left(-\frac{b}{3a}\right) - x \ , \qquad y \to 2\left(-\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^2}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) - y$$

Sostituendo in $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ abbiamo:

$$2\left(-\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^2}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) - y = a\left(-\frac{2b}{3a} - x\right)^3 + b\left(-\frac{2b}{3a} - x\right)^2 + c\left(-\frac{2b}{3a} - x\right) + d$$

Eseguendo i (lunghi!) calcoli si ottiene: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. La curva è quindi simmetrica rispetto al suo flesso.

QUESITO 6

Per quale x la tangente alla curva di equazione $y = arcsin\, x$ *ha coefficiente angolare 1?*

Deve risultare $y' = 1,\ cioè\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$, $\sqrt{1-x^2} = 1$, $1 - x^2 = 1$, $x = 0$.

QUESITO 7

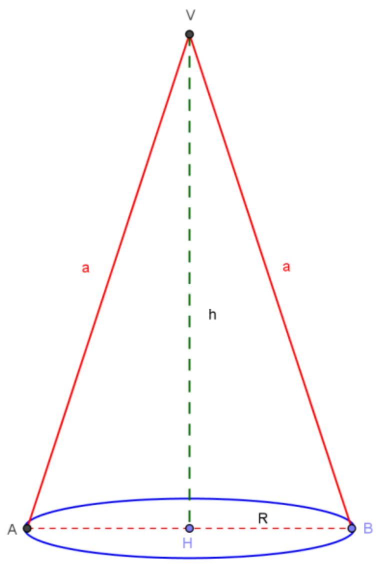
F(x) e G(x) sono due primitive rispettivamente di $y = x^2$ *e* $y = x$ *. Sapendo che è* $G(0) - F(0) = 3$ *, quanto vale* $G(1) - F(1)$*?*

Risulta: $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + a \quad e \quad G(x) = \frac{1}{2}x^2 + b$ $e\ da \ G(0) - F(0) = 3 \quad segue\ che$:

$b - a = 3$. Pertanto: $G(1) - F(1) = \frac{1}{2} + b - \frac{1}{3} - a = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + (b - a) = \frac{1}{6} + 3 = \frac{19}{6}$.

QUESITO 8

Tra i coni circolari retti di apotema $3\ dm$ *quale è quello di capacità massima? Esprimete in litri tale capacità massima.*



Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Risulta: $R^2 = a^2 - h^2$, quindi:

$$V = \frac{1}{3}\pi(a^2 - h^2)h$$

Il volume è massimo se lo è $y = h(a^2 - h^2) = f(h)$ con $0 \le h \le a$.

Metodo elementare.

$h(a^2 - h^2) = (h^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^2 - h^2)$ è il prodotto di due potenze la cui somma delle basi è costante (a^2), quindi è massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti:

$$\frac{h^2}{\frac{1}{2}} = \frac{a^2 - h^2}{1}, \quad 2h^2 = a^2 - h^2, \qquad h^2 = \frac{1}{3}a^2, \qquad h = a\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\ dm$$

Per tale valore di h si ha: $R^2 = a^2 - h^2 = 3^2 - 3 = 6\ dm$.
Il volume massimo è quindi:

$$V(massimo) = \frac{1}{3}\pi(6) \cdot \sqrt{3} = 2\pi\sqrt{3}\ dm^3 \cong 10.883\ dm^3 \cong 10.883\ litri$$

Metodo analitico.

Dobbiamo trovare il massimo della $f(h) = h(a^2 - h^2)$ con $0 \le h \le a$. Risulta:

$$f' = a^2 - h^2 + h(-2h) = a^2 - 3h^2 \ge 0 \quad se \quad -a\frac{\sqrt{3}}{3} \le h \le a\frac{\sqrt{3}}{3}$$

f è quindi crescente per $0 \le h < a\frac{\sqrt{3}}{3}$ e decrescente per $a\frac{\sqrt{3}}{3} < h < a$: è quindi massima per $h = a\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}\ dm$, come trovato precedentemente.

Con la collaborazione di Angela Santamaria