Americhe emisfero australe 2003 – Sessione suppletiva

PROBLEMA 1

Considerate assegnate, nel piano riferito a coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, la parabola λ d'equazione: $x^2 = 4(x-y)$ e la retta r d'equazione: $2y = x + 3$.

a)

Verificate che λ e r non hanno punti di intersezione.

Cerchiamo gli eventuali punti di intersezione fra la parabola e la retta:

$$\begin{cases} x^2 = 4(x-y) \\ 2y = x + 3 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} x^2 = 4\left(x - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases} \; ; \; x^2 = 2(x-3); \; x^2 - 2x + 6 = 0\,; \; \Delta < 0$$

Il sistema è impossibile, quindi la parabola e la retta non hanno punti di intersezione.

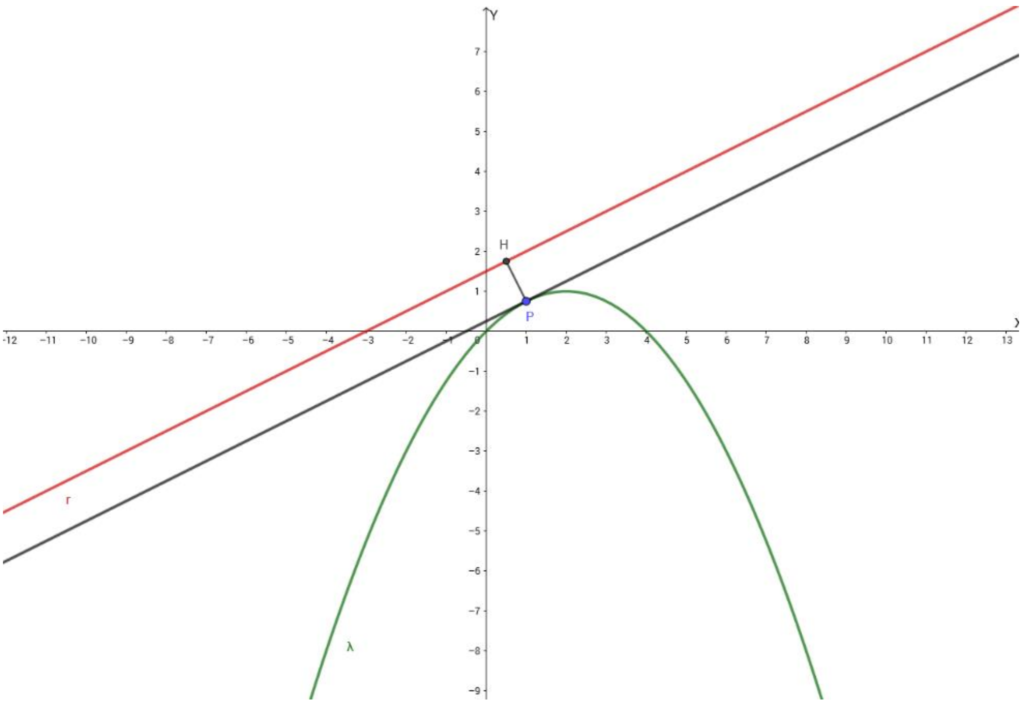
b)

Trovate il punto P di λ che ha minima distanza da r e determinate altresì il valore di tale minima distanza.

$$\lambda\colon\; x^2 - 4x + 4y = 0\,,\;\; y = -\frac{1}{4}x^2 + x\;;\;\; r\colon\; y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

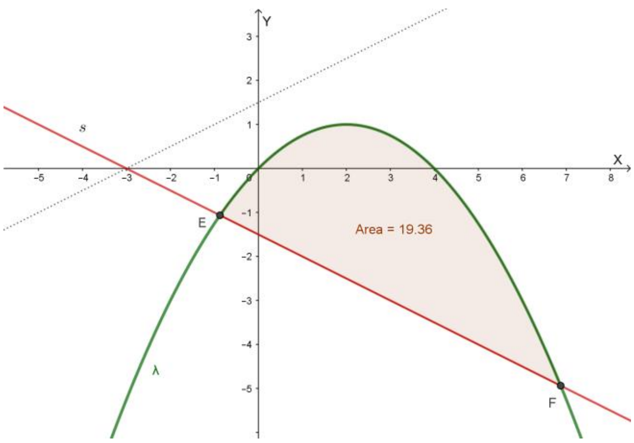
Osserviamo che il punto P che ha distanza minima da r è il punto di tangenza della retta parallela ad r e tangente alla parabola. Tale retta ha coefficiente angolare ½; quindi, derivando l'equazione della parabola: $m = y' = -\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}$ $se\;\; x = 1\;\; e\; quindi\; y = \frac{3}{4}$. Il punto richiesto ha coordinate $P = \left(1; \frac{3}{4}\right)$. La distanza minima è data dalla distanza PH di P dalla retta r. Riscriviamo r nella forma generale: $x - 2y + 3 = 0$, quindi:

$$PH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|1 - \frac{3}{2} + 3\right|}{\sqrt{1+4}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cong 0.12\colon\; distanza\; minima$$



c)

Determinate l'area della regione finita di piano R che è delimitata da λ e dalla retta s, simmetrica di r rispetto all'asse x.



L'equazione della retta s si ottiene da quella della retta r scambiando y in –y:

s: $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

Cerchiamo le ascisse delle intersezioni E ed F fra la retta s e la parabola:

$$-\frac{1}{4}x^2+x=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\ ,\ \ x^2-6x-6=0;\ \ x=3\pm\sqrt{15}$$

Quindi:

$$Area(R)=\int_{3-\sqrt{15}}^{3+\sqrt{5}}\left[\left(-\frac{1}{4}x^2+x\right)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)\right]dx=\int_{3-\sqrt{15}}^{3+\sqrt{15}}\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x\right]_{3-\sqrt{15}}^{3+\sqrt{15}}=\cdots=5\sqrt{15}\,u^2\cong 19.36\ u^2=Area(R)$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria