Americhe emisfero australe 2003 – Sessione suppletiva

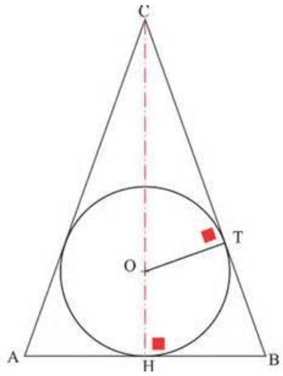
PROBLEMA 2

Fra i coni circolari retti circoscritti ad una sfera di raggio 6 cm, determinate:

a)

Il cono C di volume minimo e il valore, espresso in litri, di tale volume minimo.

Indichiamo con R il raggio della sfera.



Poniamo l'altezza CH del cono uguale ad x: CH=x, con x>2R. Per la similitudine fra i triangoli HBC e TCO risulta:

CT:OT=CH:BH ; inoltre:
$CT = \sqrt{OC^2 - OT^2} = \sqrt{(x-R)^2 - R\char`^2} = \sqrt{x^2 - 2Rx}$
Pertanto:

$\sqrt{x^2 - 2Rx} : R = x : BH$, $BH = \dfrac{Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}} = \dfrac{R\sqrt{x^2 - 2Rx}}{x - 2R}$

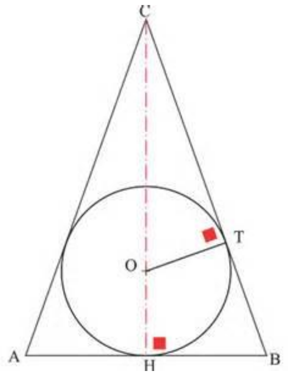
Il volume del cono è pertanto:
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot BH^2 \cdot CH = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x}{x-2R} \cdot x = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2 x^2}{x-2R}, \quad con\ x > 2R$
Tale volume è minimo se lo è:
$y = \dfrac{x^2}{x-2R}$
$y' = \dfrac{x(x-4R)}{(x-2R)^2} \geq 0 \quad se \quad x \geq 4R$
Quindi y è crescente se $x > 4R$ e decrescente se $2R < x < 4R$: $x = 4R$ è punto di minimo assoluto.
Il volume del cono C circoscritto ad una sfera di raggio R è minimo quando la sua altezza è uguale a 4R; il volume del cono vale in tal caso $\frac{8}{3}\pi R^3$.

Se R=6 cm, il cono C di volume minimo è quello di altezza h=x=24 cm ed il suo volume è:

$V = \frac{8}{3}\pi R^3 = \frac{8}{3}\pi \cdot 216\ cm^3 = 576\,\pi\ cm^3 = (576\,\pi) \cdot 10^{-3}\ litri \cong 1.810\ litri = Vol. min.$

b)

il valore approssimato, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura di C.



Come visto nel punto precedente:

$$BH = \frac{R\sqrt{x^2-2Rx}}{x-2R} = \frac{R\cdot\sqrt{8R^2}}{2R} = R\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\ cm = AH$$

Risulta quindi:

$$tg\ A\hat{C}H = \frac{AH}{CH} = \frac{6\sqrt{2}}{24} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ ,\ A\hat{C}H = arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \cong 19.47°$$

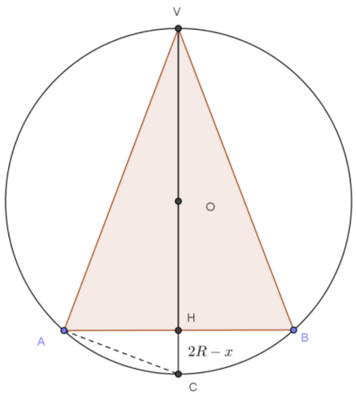
$$A\hat{C}B = 38.9° \cong 39°$$

L'angolo di apertura misura circa 39°.

c)

Il rapporto tra i volumi delle due sfere, inscritta e circoscritta a C.

Poiché il volume di una sfera è $V(sfera) = \frac{4}{3}\pi R^3$, occorre trovare il raggio della sfera circoscritta al cono C.



Sia R il raggio della sfera e indichiamo con x l'altezza VH del cono (in figura è rappresentata una sezione del cono inscritto nella sfera ottenuta con un piano passante per il vertice V del cono e per la retta della sua altezza VH). Risulta:

$$0 < x < 2R$$

Per il secondo teorema di Euclide si ha:

$AH^2 = VH\cdot HC = x(2R-x)$ da cui:

$$\left(6\sqrt{2}\right)^2 = 24(2R-24),\ \ 72 = 48(R-12),\qquad \frac{3}{2} = R-12,\ \ R = \frac{27}{2}\ cm$$

Il rapporto fra i volumi delle sfere inscritta e circoscritta al cono C è dato dal rapporto fra i cubi dei rispettivi raggi, quindi:

$$\frac{V(sfera\ inscritta)}{V(sfera\ circoscritta)} = \frac{6^3}{\left(\frac{27}{2}\right)^3} = \frac{64}{729}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria