Americhe emisfero australe 2003 – Sessione suppletiva - Questionario

QUESITO 1

Se è

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-5}{x-2}=1,$$

qual è il

$$\lim_{x\to 4} f(x).$$

Dal limite in ipotesi segue che $lim_{x\to 4}\frac{f(x)-5}{4-2}=1$ $da\ cui$ $lim_{x\to 4}(f(x)-5)=2,$ quindi:

$$\lim_{x\to 4} f(x)=7$$

QUESITO 2

Spiegate perché la derivata di $\sin x$ *è* $\cos x$ *e calcolate la derivata d'ordine 725 di* $\sin x$.

Calcoliamo la derivata di f(x)=sin(x) servendoci della definizione di derivata (utilizziamo le formule di prostaferesi):

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right]\cos(x)=1\cdot\cos(x)=\cos(x)$$

Calcoliamo le derivate successive di $f(x)=\sin(x)$:

$$f'(x)=\cos(x),\qquad f''(x)=-\sin(x),\qquad f'''(x)=-\cos(x),\qquad f^{(4)}=\sin(x)$$

Quindi ogni quattro derivate si ritorna alla funzione di partenza; osserviamo che:

$$725 = 4 \cdot 181 + 1$$

Quindi la derivata di ordine 724 riporta a sin(x); la derivata di ordine 725 è uguale alla derivata prima, pertanto:

$$f^{(725)}(x) = f'(x) = cosx$$

QUESITO 3

Considerate la curva $y = x - \frac{1}{2x}$:

ci sono punti di essi dove la pendenza è 3? Se sì, determinateli.

Si tratta di trovare gli eventuali punti della curva per cui $f'(x) = 3$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2x^2} = 3 \quad se \quad 4x^2 = 1\,, \quad x = \pm\frac{1}{2}$$

Per $x = -\frac{1}{2}$ $si\ ha$ $y = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$: $A = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Per $x = +\frac{1}{2}$ $si\ ha$ $y = +\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$: $B = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

QUESITO 4

Mostrate che le tangenti alla curva $y = \frac{\pi \sin x}{x}$ *in* $x = \pi\ ed\ x = -\pi$ *si intersecano ad angolo retto.*

Basta verificare che $y'(\pi) \cdot y'(-\pi) = -1$.

$$y' = \pi \cdot \frac{xcosx - sinx}{x^2} \quad ; \quad y'(\pi) = \pi \cdot \frac{-\pi - 0}{\pi^2} = -1 \;\; ; \quad y'(-\pi) = \pi \cdot \frac{\pi - 0}{\pi^2} = 1$$

Quindi $y'(\pi) \cdot y'(-\pi) = (-1)(1) = -1 \quad c.v.d.$

QUESITO 5

Provate che la funzione $f(x) = x^4 + 3x + 1$ *ha esattamente uno zero nell'intervallo [-2; -1].*

La funzione è continua su tutto R, quindi lo è in *[-2; -1].* Inoltre:

$$f(-2) = 16 - 6 + 1 > 0 \;; \quad f(-1) = 1 - 3 + 1 < 0$$

Quindi la funzione soddisfa le ipotesi dl Teorema degli zeri, pertanto ammette ALMENO uno zero interno all'intervallo richiesto. Analizziamo la derivata prima della funzione:

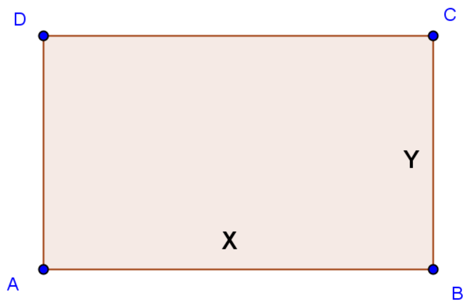
$$f'(x) = 4x^3 + 3 > 0 \quad se \quad x > -\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cong -0.9$$

Quindi la funzione è strettamente decrescente nell'intervallo [-2; -1] perciò il suo grafico taglia l'asse delle x in un solo punto in tale intervallo:

la funzione ha esattamente uno zero nell'intervallo *[-2; -1].*

QUESITO 6

Mostrate che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.



Posto AB = x e BC = y $(x \geq 0, y \geq 0)$ AB+BC =p = costante

Area = S = x y

Per via elementare: sappiamo *che il prodotto di due grandezze a somma costante è massimo quando le due grandezze sono uguali*, quindi S è massima quando x=y, cioè nel caso del quadrato.

Questa proprietà può essere dimostrata a partire dalla seguente identità:

$$(\mathrm{x} + \mathrm{y})^2 - (\mathrm{x} - \mathrm{y})^2 = 4\mathrm{xy}$$

da cui è facile capire che, se x+y è costante, il massimo di 4xy (quindi di xy), si ha quando $(x-y)^2=0$, cioè se x=y.

Secondo metodo

$x+y=p \quad con \quad 0 \le x \le p$

$y=p-x \quad con \quad 0 \le y \le p$

$S=x \cdot y = x(p-x) = -x^2+px$

che rappresenta una parabola con la concavità verso il basso, il cui massimo si ha in corrispondenza del vertice:

$\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2}}$ (che soddisfa le condizioni della x), $\boldsymbol{y}=p-x=p-\frac{p}{2}=\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{2}}$ da cui x=y , quindi il rettangolo di area massima è il quadrato.

N.B. Il problema potrebbe essere risolto anche mediante le derivate studiando il segno della derivata di S: $S'=-2x+p>0 \quad se\ x<\frac{p}{2}$, quindi S è crescente se $x<\frac{p}{2}$ e decrescente se $x>\frac{p}{2}$, quindi in $x=\frac{p}{2}$ c'è il massimo assoluto di S.

QUESITO 7

Per quale o quali valori della costante k la curva $y=x^3+kx^2+3x-4$ ha esattamente una tangente orizzontale?

Deve essere $y'=0$ per un solo valore di x.

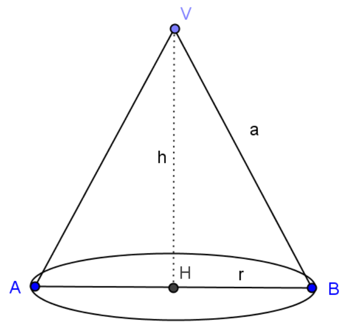
$$y'=3x^2+2kx+3=0\ :\ per\ avere\ una\ sola\ radice\ deve\ essere\ \Delta=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=k^2-9\ :\ \Delta=0\ se\ k=\pm 3$$

La curva ha esattamente una tangente orizzontale se $k=\pm 3$.

QUESITO 8

Tra i coni circolari retti di apotema 6 dm quale è quello di capacità massima? Esprimete in litri tale capacità massima.



$V=\frac{1}{3}\pi\, r^2\, h=\frac{1}{3}\pi\,(a^2-h^2)\,h$, che è massimo se lo è $y=(a^2-h^2)\,h$ (a>h, 0<h<6)

$y'=-2h^2+(a^2-h^2)=a^2-3h^2\geq 0$ quando $3h^2\leq 36$, $h^2\leq 12$ quindi y (ed anche il volume) cresce se $0<h<2\sqrt{3}$ e decresce se $2\sqrt{3}<h<6$.

Il massimo si ha quindi per $h=2\sqrt{3}$. Per tale valore il volume è:

$$V=\frac{1}{3}\pi(36-12)\cdot 2\sqrt{3}=\frac{1}{3}\pi\left(48\sqrt{3}\right)=16\,\pi\,\sqrt{3}\ dm^3=\left(16\,\pi\,\sqrt{3}\right)\ litri\cong 87.062\ litri$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria