ORDINAMENTO 2003 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

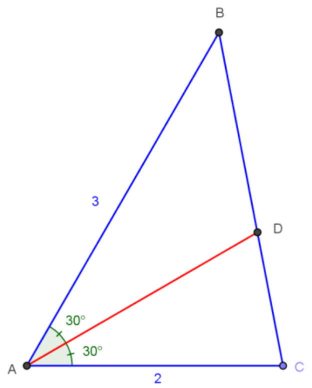
Del triangolo ABC si hanno le seguenti in formazioni:

$$\overline{AB} = 3\ cm \qquad \overline{AC} = 2\ cm \qquad C\hat{A}B = 60°$$

Si tracci la bisettrice di $C\hat{A}B$ e se ne indichi con D l'intersezione con il lato BC.

1)

Si calcoli la lunghezza del lato BC e delle parti in cui esso risulta diviso dal punto D.



La lunghezza di BC si può calcolare mediante il teorema del coseno:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(60°) =$$

$$= 9 + 4 - 12 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

Quindi: $BC = \sqrt{7}$

Per calcolare BD e CD utilizziamo il teorema della bisettrice (*la bisettrice di un angolo interno di un triangolo divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali ai lati dell'angolo*):

$$BD:CD = AB:AC\ , \quad da\ cui \quad BD:CD = 3:2\ , \quad quindi \quad (BD+CD):CD = 5:2\ ,$$

$$BC:CD = 5:2\ , \quad \sqrt{7}:CD = 5:2\ , \quad CD = \frac{2}{5}\sqrt{7} \quad e\ quindi \quad BD = \frac{3}{5}\sqrt{7}$$

2)

Si determinino il coseno dell'angolo in B, la misura di AD e, disponendo di un calcolatore, le misure approssimate degli altri due angoli interni di vertici B e C.

Per calcolare il coseno dell'angolo in B applichiamo ancora il teorema del coseno:
$AC^2 = AB^2 + CD^2 - 2 \cdot AB \cdot CD \cdot \cos(\hat{B})$ da cui: $\cos(\hat{B}) = \frac{AB^2+CD^2-AC^2}{2 \cdot AB \cdot CD} = \frac{9+7-4}{6\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$
Quindi: $\cos(\hat{B}) = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{7}\sqrt{7}$

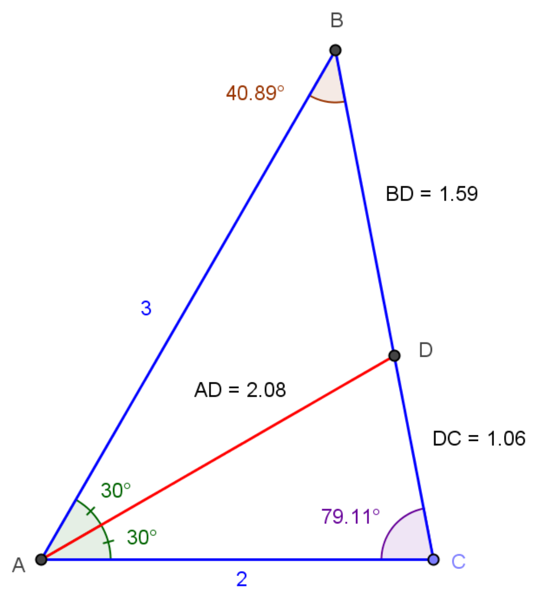
Calcoliamo la misura di AD (ancora con il teorema del coseno):

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos(\hat{B}) = 9 + \left(\frac{3}{5}\sqrt{7}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{5}\sqrt{7} \cdot \frac{2}{7}\sqrt{7} = \frac{108}{25}$$

Quindi:

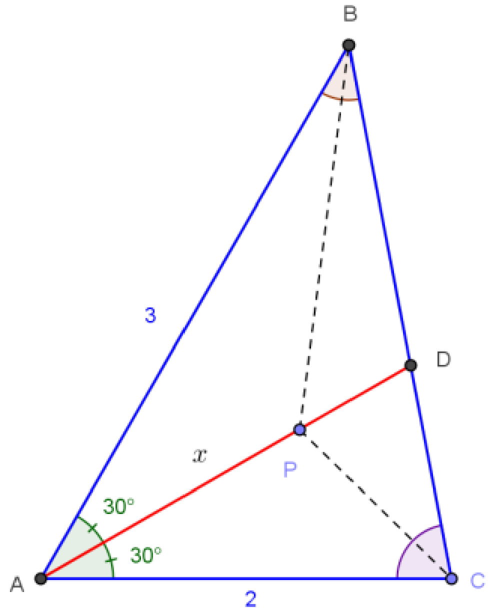
$$AD = \sqrt{\frac{108}{25}} = \frac{6}{5}\sqrt{3}$$

Calcoliamo le misure approssimate degli angoli interni B e C.
Da $\cos(\hat{B}) = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{7}\sqrt{7}$ segue $\hat{B} = arccos\left(\frac{2}{7}\sqrt{7}\right) \cong 40.89° \cong 40°53'24''$
Risulta poi:
$\hat{C} = 180° - 60° - \hat{B} \cong 120° - 40.89° \cong 79.11° \cong 79°06'36°$



3)

Si trovi sul lato AD, internamente ad esso, un punto P tale che la somma s dei quadrati delle sue distanze dai vertici A, B e C sia m^2 essendo m un parametro reale.



Poniamo $AP = x$, $con \quad 0 < x < \frac{6}{5}\sqrt{3}$ (estremo superiore la misura di AD)
Gli estremi non sono inclusi perché P è interno al segmento AD.

Si ha:

$$PB^2 = AP^2 + AB^2 - 2 \cdot AP \cdot AB \cdot \cos(30°) = x^2 + 9 - 3x\sqrt{3}$$

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos(30°) = x^2 + 4 - 2x\sqrt{3}$$

La somma richiesta è quindi:

$$s = AP^2 + PB^2 + PC^2 = x^2 + \left(x^2 + 9 - 3x\sqrt{3}\right) + \left(x^2 + 4 - 2x\sqrt{3}\right) = 3x^2 - 5x\sqrt{3} + 13$$

Quindi:

$$s = 3x^2 - 5x\sqrt{3} + 13 = m^2$$

4)

Si discuta tale ultima questione rispetto al parametro m.

Dobbiamo discutere il seguente sistema misto:

$$\begin{cases} 3x^2 - 5x\sqrt{3} + 13 = m^2 \\ 0 < x < \frac{6}{5}\sqrt{3} \\ m \in R \end{cases}$$

Discutiamo il sistema graficamente rappresentando la parabola di equazione

$y = 3x^2 - 5x\sqrt{3} + 13$

ed il fascio di rette $y = m^2$

La parabola taglia l'asse y nel punto di ordinata 13 ed ha vertice di ascissa:

$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$; l'ordinata del vertice è $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{75-156}{12} = \frac{81}{12} = \frac{27}{4}$

Gli estremi dell'arco di parabola corrispondenti ai limiti della x sono:

Se x=0, y=13; se $x = \frac{6}{5}\sqrt{3}$, $y = 3 \cdot \left(\frac{6}{5}\sqrt{3}\right)^2 - 5\left(\frac{6}{5}\sqrt{3}\right)\sqrt{3} + 13 = \frac{199}{25}$

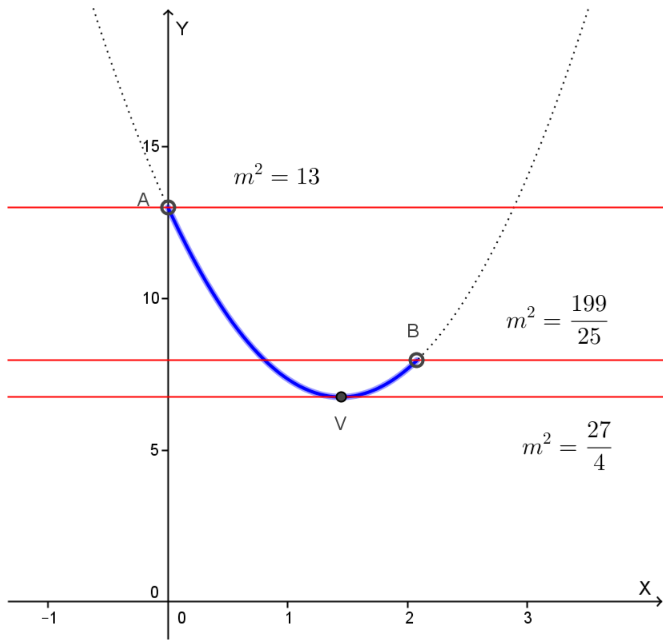
Determiniamo le rette caratteristiche ai fini della discussione:

Retta per $A = (0; 13)$: $m^2 = 13$, $m = \pm\sqrt{13} \cong \pm 3.6$

Retta per $B = \left(\frac{6}{5}\sqrt{3}; \frac{199}{25}\right)$: $m^2 = \frac{199}{25} \cong 7.96$, $m = \pm\sqrt{\frac{199}{25}} = \pm\frac{1}{5}\sqrt{199} \cong \pm 2.8$

Retta per $V = \left(\frac{5\sqrt{3}}{6}; \frac{27}{4}\right)$: $m^2 = \frac{27}{4} \cong 6.75$, $m = \pm\sqrt{\frac{27}{4}} = \pm\frac{3}{2}\sqrt{3} \cong \pm 2.6$

Questa la situazione grafica:



Il problema quindi ammette le seguenti soluzioni al variare del parametro reale m:

UNA SOLUZIONE: se $\frac{199}{25} \leq m^2 < 13$

DUE SOLUZIONI: se $\frac{27}{4} \leq m < \frac{199}{25}$

(se $m^2 = \frac{27}{4}$ le due soluzioni sono coincidenti).

Con la collaborazione di Angela Santamaria