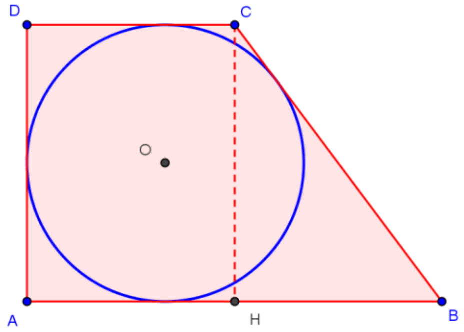
PNI 2003 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

In un trapezio rettangolo ABCD, circoscritto a un cerchio, AB è la base maggiore, CD la minore e BC il lato obliquo. Le misure, considerate rispetto alla stessa unità di misura, del raggio del cerchio e del perimetro del trapezio sono nell'ordine 2 e 18.

a)

Calcolare le misure dei lati del trapezio.



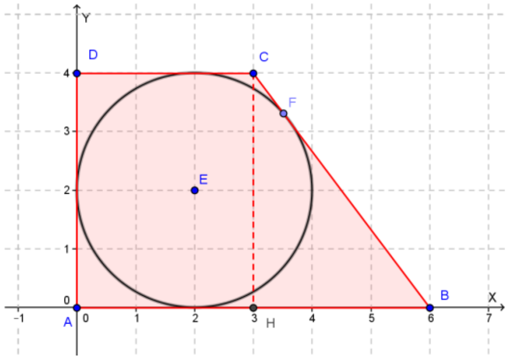
Per una nota proprietà dei quadrilateri circoscritti ad una circonferenza la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due; quindi, essendo la misura del perimetro del trapezio 18, la somma delle misure di AD e BC è 9. Ma AD equivale al diametro della circonferenza, quindi misura 4: ne segue che il lato obliquo BC misura 5. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo BCH si trova facilmente che la misura di BH è 3. Ma la somma di AB e CD misura 9, quindi la base minore CD misura (9-3):2=3. La base maggiore misurerà quindi 6. Riepilogando:

Base maggiore AB=6
Base minore CD=3
Altezza AD=4
Lato obliquo BC=5

b)

Riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), scrivere le coordinate dei vertici del trapezio.

Fissiamo il sistema di riferimento con l'origine in A, l'asse x coincidente con la retta che contiene la base maggiore e l'asse y con la retta che contiene l'altezza:



Le coordinate dei vertici del trapezio sono:

$A = (0; 0), \quad B = (6; 0), \quad C = (3; 4), \quad D = (0; 4)$

c)

Tra le centro-affinità di equazioni:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x' = ax + by} \\ \boldsymbol{y' = cx + dy} \end{cases}$$

trovare quella che trasforma il vertice B del trapezio nel vertice C e il vertice C nel vertice D.

Se B si trasforma in C abbiamo: $\begin{cases} 3 = 6a \\ 4 = 6c \end{cases} \quad da\ cui \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$

Se C si trasforma in D abbiamo:

$$\begin{cases} 0 = 3a + 4b \\ 4 = 3c + 4d \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{3}{2} + 4b \\ 4 = 2 + 4d \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b = -\dfrac{3}{8} \\ d = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

L'affinità richiesta ha quindi equazioni:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{8}y \\ y' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

d)

Stabilire se la centro-affinità trovata presenta rette unite.

Imponiamo alla generica retta di equazione $ax' + by' + c = 0$ (con a e b non contemporaneamente nulli) di trasformarsi nella retta di equazione $ax + by + c = 0$.

$ax' + by' + c = 0$ diventa $a\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{8}y\right) + b\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y\right) = 0$ da cui:

$\left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b)x\right) + \left(-\frac{3}{8}a + \frac{1}{2}b\right)y + c = 0$ che coincide con $ax + by + c = 0$ se:

$$\frac{\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b}{a} = \frac{-\frac{3}{8}a + \frac{1}{2}b}{b} = \frac{c}{c} = 1 \quad da\ cui\colon \left(\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b\right)b = \left(-\frac{3}{8}a + \frac{1}{2}b\right)a$$

$$\frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}b^2 = -\frac{3}{8}a^2 + \frac{1}{2}ab \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{3}b^2 = -\frac{3}{8}a^2$$

Che è verificata solo se a e b sono nulli; ma in tal caso non ha senso la retta, quindi non ci sono rette unite:

e)

Calcolare l'area della figura trasformata del cerchio inscritto nel trapezio in base alla centro-affinità trovata sopra.

Ricordiamo che in un'affinità, dette S ed S' le aree di due figure corrispondenti, il rapporto fra le aree S' ed S è uguale al valore assoluto del rapporto k di affinità; tale rapporto k è dato dal determinante formato con i coefficienti della x e della y delle equazioni dell'affinità:

$$k = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (si\ tratta\ di\ un'affinità\ diretta)$$

Pertanto: $\frac{S'}{S} = \frac{1}{2}$, $S' = \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}(\pi R^2) = \frac{1}{2}(\pi \cdot 4) = 2\pi = S'$

Con la collaborazione di Angela Santamaria