ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2002/2003
CORSO DI ORDINAMENTO
Sessione straordinaria
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

È assegnata la seguente equazione in x:

$$x^3 + 2x - 50 = 0 .$$

a) Dimostrare che ammette una ed una sola soluzione $\bar{x}$ nel campo reale.

b) Determinare il numero intero z tale che risulti: $z < \bar{x} < z + 1$.

c) Dopo aver riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare, se esistono, i valori del parametro reale k (k^1 -1) per cui la curva C_k di equazione:

$$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$$

ammette un massimo e un minimo relativi.

d) Stabilire se esiste un valore $\bar{k}$ di k per cui la curva $C_{\bar{k}}$ è simmetrica rispetto all'origine O.

e) Stabilire se fra le rette di equazione y=5x+m, dove m è un parametro reale, ve ne sono di tangenti alla curva C_0 ottenuta per k=0.

PROBLEMA 2.

La base minore, la base maggiore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine:

$$6 \text{ cm} , 10 \text{ cm} , 4\left(4 + \sqrt{5}\right) \text{cm} .$$

a) Dire, giustificando la risposta, se il trapezio è circoscrittibile ad una circonferenza.
b) Spiegare perché il trapezio è inscrittibile in una circonferenza k.
c) Dopo aver riferito il piano del trapezio ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione di k.
d) Trovare l'equazione della parabola p passante per gli estremi della base minore del trapezio e avente l'asse perpendicolare a tale base e il vertice nel centro di k.
e) Calcolare le aree delle regioni piane il cui la parabola p divide il trapezio.
f) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k.

QUESTIONARIO.

1) Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni». Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2) In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0 ,$$

dove k è un parametro reale. Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:

1) un punto; 2) due punti; 3) infiniti punti; 4) nessun punto.

3) Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un trapezio rettangolo abbia le diagonali perpendicolari è che le misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore, prese nell'ordine e considerate rispetto alla stessa unità di misura, siano numeri in progressione geometrica.

4) Dire se è vero che risulta: $\sqrt{x^2 + 2x\sqrt{3} + 3} = x + \sqrt{3}$ per ogni x reale e giustificare la risposta.

5) Si consideri la funzione polinomiale in x:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n .$$

Dimostrare che il suo grafico, rappresentato in un piano cartesiano, ha come tangente nel punto di ascissa 0 la retta di equazione $y = a_0 + a_1 x$.

6) Si consideri la successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \begin{cases} 1 \text{ se } n = 1 \\ a_{n-1} + n \text{ se } n > 1 \end{cases}.$$

Calcolare a_{100}.

7) Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{2}{3^n},$$

calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

8) Considerata la funzione f(x) tale che:

$$f(x) = \int_0^x (1 - \ln t)\,dt, \quad \text{con } x > 0,$$

determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

9) Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama *segmento sferico a due basi*. Indicati con r_1 ed r_2 i raggi delle due basi del segmento sferico e con *h* la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume *V* del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6}\pi h\left(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2\right).$$

Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.

10) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \left(1 - e^{-t}\right)dt}{\operatorname{sen}^2 x},$$

essendo *e* la base dei logaritmi naturali.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'Istituto prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.

Torna