ORDINAMENTO 2003 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

È assegnata la seguente equazione in x: $x^3 + 2x - 50 = 0$.

a)

Dimostrare che ammette una e una sola soluzione $\bar{x}$ *nel campo reale.*

La funzione di equazione $f(x) = x^3 + 2x - 50$ è razionale intera di grado dispari, quindi ammette almeno uno zero; l'equazione ammette quindi almeno una soluzione.
Calcoliamo la derivata prima della funzione per vedere se è strettamente monotona:

$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0 \ \ per\ ogni\ x$: quindi la funzione è sempre crescente, pertanto l'equazione data ha una sola soluzione.

b)

Determinare il numero intero z tale che risulti: $z < \bar{x} < z + 1$.

Isoliamo la radice $\bar{x}$:

$f(3) = 27 + 6 - 50 < 0,\ \ f(4) = 64 + 8 - 50 > 0$ quindi la radice è compresa fra 3 e 4.

Risulta pertanto z=3.

c)

Dopo aver riferito il piano a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare, se esistono, i valori del parametro reale k ($k \neq -1$) *per cui la curva* C_k *di equazione:*

$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$

ammette un massimo e un minimo relativi.

Calcoliamo la derivata della funzione:

$y' = 3x^2 + 2 + 3kx^2 + 2k = 3(1 + k)x^2 + 2 + 2k$

Affinché ci siano un massimo ed un minimo relativi è necessario che la derivata prima si annulli due volte, quindi l'equazione $3(1+k)x^2+2+2k=0$ deve avere due radici reali

e distinte. Ma tale equazione, con $k \neq -1$, equivale a: $3x^2+2=0$, che non ammette soluzioni reali.

Non esiste quindi alcun valore di k per cui la curva C_k ammetta un massimo ed un minimo relativi.

d)

Stabilire se esiste un valore $\bar{k}$ di k per cui la curva $C_{\bar{k}}$ è simmetrica rispetto all'origine O.

La curva C_k è simmetrica rispetto all'origine se $y(-x) = -y(x)$, quindi se:

$(-x^3-2x-50)+k(-x^3-2x-75) = -(x^3+2x-50)-k(x^3+2x-75)$ per ogni x.

$-50-75k = 50+75k$, $-100 = 150k$, $k = -\frac{2}{3}$

e)

Stabilire se fra le rette di equazione $y = 5x+m$, dove m è un parametro reale, ve ne sono di tangenti alla curva C_0 ottenuta per $k=0$.

La curva C_0 ha equazione:

$y = x^3+2x-50$

Tale curva è tangente alla retta data se:

$\begin{cases} x^3+2x-50 = 5x+m \\ D(x^3+2x-50) = D(5x+m) \end{cases}$ $\begin{cases} x^3-3x-50-m=0 \\ 3x^2+2=5 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 1 \end{cases}$ quindi:

$\begin{cases} x=1 \\ m=-52 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1 \\ m=-48 \end{cases}$

Ci sono quindi due rette, fra quelle date, tangenti alla curva C_0; esse sono:

$y = 5x-52 \quad e \quad y = 5x-48$

Con la collaborazione di Angela Santamaria