

## **PNI 2003 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1**

È assegnata la seguente equazione in  $x$ :  $x^3 + 2x - 50 = 0$ .

**a)**

*Dimostrare che ammette una e una sola soluzione  $\bar{x}$ .*

La funzione di equazione  $f(x) = x^3 + 2x - 50$  è razionale intera di grado dispari, quindi ammette almeno uno zero; l'equazione ammette quindi almeno una soluzione. Calcoliamo la derivata prima della funzione per vedere se è strettamente monotona:

$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$  per ogni  $x$ : quindi la funzione è sempre crescente, pertanto l'equazione data ha una sola soluzione.

**b)**

*Determinare il numero intero  $z$  tale che risulti:  $z < \bar{x} < z + 1$ .*

Isoliamo la radice  $\bar{x}$ :

$f(3) = 27 + 6 - 50 < 0$ ,  $f(4) = 64 + 8 - 50 > 0$  quindi la radice è compresa fra 3 e 4.

Risulta pertanto  $z=3$ .

**c)**

*Scrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato di  $\bar{x}$  a meno di  $10^{-4}$ .*

L'algoritmo richiesto deve calcolare la radice  $\bar{x}$ , a meno di  $10^{-4}$ , dell'equazione

$x^3 + 2x - 50 = 0$  nell'intervallo  $[3;4]$ .

Indicata con  $f(x)=0$  l'equazione, abbiamo già verificato che la radice è unica nell'intervallo  $[a; b]=[3;4]$ .

I metodi più utilizzati per determinare un valore approssimato della radice dell'equazione sono quelli di Bisezione ( o Dicotomia), delle Tangenti (o di Newton), delle Secanti (caso particolare di quello delle Tangenti) e del Punto fisso.

Indichiamo un algoritmo per determinare la radice dell'equazione  $f(x)=0$  con l'approssimazione richiesta  $10^{-4}$ .

```
Algoritmo bisezione
  Errore:=10^(-4)
  x1:=3
  x2:=4
  c:=(x1+x2)/2
  Se f(c)=0 allora scrivi "La radice è c" altrimenti ripeti
    Se f(c)*f(x1)<0 allora poni x2=c altrimenti poni x1=c
  Finchè (x2-x1)/2<errore oppure f(c)=0
  Scrivi c
Fine.
```

Indichiamo un possibile programma in Pascal (valido per la funzione  $f(x) = x^3 + 2x - 50$  e per l'intervallo [3;4]).

```
program bisezione;
Uses Crt;
Const   a=3;
        b=4;
        n=4;

Var     c:real;
        risposta:char;

Procedure Presentazione;
Begin
  Writeln('Questo programma permette di calcolare la radice di ');
  writeln('X^3 +2*x-50 = 0      nell''intervallo [3;4]');
  Writeln('a meno di 10 ^(-4) ');
  Writeln;writeln;
End;

Function  f(x:real):real;

Begin
  f:=x*x*x+2*x-50
End;

Procedure  Elabora;
Var  errore,x1,x2:real;
Begin
  errore:=exp(-4*ln(10));    (*10^(-4)*)
  x1:=a;      x2:=b;

  Repeat
    c:=(x1+x2)/2;
    If f(c)*f(x1)<0 then
      x2:=c  ELSE  x1:=c
  Until  (abs(x2-x1)<errore)  or  (f(c)=0)
end;
```

```

Procedure Comunica;
Begin
  Writeln('La radice , con l''approssimazione richiesta , : ',c:10:n);
  Writeln
End;

BEGIN (*main*)
Repeat
  Clrscr;
  Presentazione;
  Elabora;
  Comunica;
  Write('Ancora? (s/n) ');
  Readln(risposta);
Until risposta in ['n','N']
END.

```

Il programma può essere provato on line copiandolo nell'apposita finestra al seguente link:

[http://www.tutorialspoint.com/compile\\_pascal\\_online.php](http://www.tutorialspoint.com/compile_pascal_online.php)

L'esito è il seguente:

```

sh-4.3$ fpc -
vw main.pas
Free Pascal Compiler vers
ion 2.6.4 [2015/03/25] for x86_64
Copyright (c) 1993-
2014 by Florian Klaempfl and others
Target OS: Linux for x86-
64
Questo programma permette di calcolare la radice di
X^3 +2*x-50=0
nell'intervallo [3;4] a meno di 10^(-4)
La radice, con l'approssimazione richiesta:3.5032
Ancora? (s/n)

```

**d)**

*Dopo aver riferito il piano a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare, se esistono, i valori del parametro reale  $k$  ( $k \neq -1$ ) per cui la curva  $C_k$  di equazione:*

$$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$$

*ammette un massimo e un minimo relativi.*

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$y' = 3x^2 + 2 + 3kx^2 + 2k = 3(1 + k)x^2 + 2 + 2k$$

Affinché ci siano un massimo ed un minimo relativi è necessario che la derivata prima si annulli due volte, quindi l'equazione  $3(1 + k)x^2 + 2 + 2k = 0$  deve avere due radici reali e distinte. Ma tale equazione, con  $k \neq -1$ , equivale a:  $3x^2 + 2 = 0$ , che non ammette soluzioni reali.

Non esiste quindi alcun valore di  $k$  per cui la curva  $C_k$  ammetta un massimo ed un minimo relativi.

e)

Stabilire se esiste un valore  $\bar{k}$  di  $k$  per cui la curva  $C_{\bar{k}}$  è simmetrica rispetto all'origine  $O$ .

La curva  $C_k$  è simmetrica rispetto all'origine se  $y(-x) = -y(x)$ , quindi se:

$$(-x^3 - 2x - 50) + k(-x^3 - 2x - 75) = -(x^3 + 2x - 50) - k(x^3 + 2x - 75) \quad \text{per ogni } x.$$

$$-50 - 75k = 50 + 75k, \quad -100 = 150k, \quad k = -\frac{2}{3}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria