PNI 2003 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Un gruppo di persone è costituito da 3 uomini e dalle rispettive mogli. Ciascun uomo sceglie a caso una fra le 3 donne, con uguali possibilità di scelta, per un giro di ballo.

a)

Calcolare quante sono le possibili terne di coppie di ballerini.

Indichiamo con U1,U2, U3 gli uomini e con D1, D2, D3 le tre donne (mogli rispettivamente di U1, U2 e U3).
Le possibili terne sono:
Se U1-D1, restano 2 possibilità per gli altri 2: totale 2 casi.
Analogamente se U1-D2 e U1-D3: in totale avremo quindi 2+2+2=6 terne possibili.

b)

Calcolare la probabilità che:

1) nessun uomo balli con la propria moglie;
2) un solo uomo balli con la propria moglie;
3) tutti e tre gli uomini ballino con le rispettive mogli.

1) Le possibili terne di ballerini sono 6. Di queste solo 2 prevedono che nessun uomo balli con la propria moglie e precisamente:U1-D2, U2-D1, U3-D2 e U1-D3, U2-D1 e U3-D2.
   La probabilità che nessun uomo balli con la propria moglie è quindi $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2) La probabilità che un determinato uomo, chiamiamolo A, balli con la propria moglie è 1/3; la probabilità che il secondo uomo, chiamiamolo B, NON balli con la propria moglie è 1/2 (una delle due donne rimaste è la moglie); la probabilità che il terzo uomo NON balli con la propria moglie è pari a 1 (è rimasta solo la terza donna, che non è sua moglie). Quindi la probabilità che solo il primo dei tre uomini, A, balli con la propria moglie è pari a: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$. Analoga probabilità si ha per B e per C: quindi la probabilità che un solo uomo (A, o B o C) balli con la propria moglie è $3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

3) La probabilità che tutti e tre gli uomini ballino con la propria moglie è $\frac{1}{6}$ in quanto c'è una sola terna favorevole su 6.

c)

Il gioco viene effettuato per n volte. Calcolare:

1) per n=24, il numero medio di volte in cui tutti e tre gli uomini ballano con le rispettive mogli;

2) per n=4, la probabilità che non più di 2 volte capiti che nessun uomo balli con la propria moglie;

3) per n=60, la probabilità che esattamente 30 volte capiti che un solo uomo balli con la propria moglie;

4) per n=15, la probabilità che almeno 14 volte capiti che almeno un uomo balli con la propria moglie.

N.B.: Per l'uso che il candidato, se crede, ne può fare, si forniscono le formule della probabilità binomiale e della distribuzione normale:

$$p_k=\binom{n}{k}p^k q^{n-k},\ y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\quad (e\simeq 2{,}7182,\ \pi\simeq 3{,}1415).$$

1) Se il gioco viene effettuato 1 volta la probabilità "del successo" è 1/6 (caso 3 della precedente domanda). Se il gioco viene effettuato n=24 volte (nelle stesse condizioni), il numero medio di successi è $m=n\cdot p=24\cdot\frac{1}{6}=4$.

2) La probabilità del successo (nessun uomo balla con la propria moglie) è $p=\frac{1}{3}$. La probabilità di avere non più di 2 successi equivale alla probabilità di avere 0, 1 oppure 2 successi, quindi, considerando la distribuzione binomiale:

$$p(0)=\binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4-0}=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$$

$$p(1)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4-1}=4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$$

$$p(2)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4-2}=6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{81}$$

La probabilità richiesta è quindi: $\frac{16}{81}+\frac{32}{81}+\frac{24}{81}=\frac{72}{81}$.

3) In tal caso la probabilità del successo è 1/2 (caso 2 del punto b); la probabilità di avere 30 successi su n=60 prove è:

$$p(30) = \binom{60}{30}\left(\frac{1}{2}\right)^{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{60-30} = \binom{60}{30} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{60} \cong 0.10258\,.$$

4) La probabilità che almeno un uomo balli con la propria moglie (successo) è

$$1 - p(nessun\ uomo\ balla\ con\ la\ propria\ moglie) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

La probabilità di avere almeno 14 successi su n=15 prove è:

$$p(14\ successi\ su\ 15) + p(15\ successi\ su\ 15) = \binom{15}{14}\left(\frac{2}{3}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{15-14} + \left(\frac{2}{3}\right)^{15} =$$

$$= 15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{14} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^{15} \cong 0.01941\,.$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria