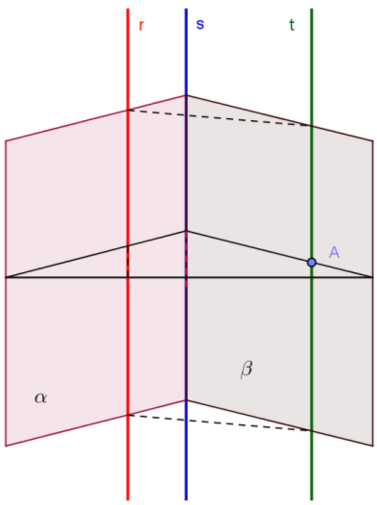
PNI 2003 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni». Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

La proprietà è vera.

Sia r parallela ad s e sia α il piano contenente r ed s. Sia poi s parallela ad una retta t e sia β il piano contenente s e t. Le rette r e t sono parallele: esse appartengono al piano che contiene r ed un punto A di t e non possono avere alcun punto in comune.
Notiamo che se consideriamo il piano perpendicolare a t in A, tale piano è anche perpendicolare ad s (se due rette dello spazio sono parallele, un piano perpendicolare ad una è perpendicolare anche all'altra), che è parallela a t, e ad r (che è parallela ad s): r, s e t sono quindi perpendicolari allo stesso piano e pertanto sono parallele.



QUESITO 2

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0$ *dove k è un parametro reale.*

Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:

1) *un punto; 2) due punti; 3) infiniti punti; 4) nessun punto.*

L'equazione $8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0$ rappresenta una circonferenza (reale, non reale o degenere in un punto).

L'equazione è equivalente a $x^2 + y^2 - \frac{k}{2}x + y - \frac{3}{8}k = 0$ che è del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Risulta: $R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{k^2}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}k = \frac{1}{16}(k^2 + 6k + 4) = 0 \ se \ \ k = -3 \pm \sqrt{5}$
Si hanno i seguenti casi:

1. $R^2 = 0,\ k = -3 \pm \sqrt{5}$: la circonferenza si riduce ad un punto.
2. Il luogo non può mai essere costituito da due punti.
3. $R^2 > 0,\ k < -3 - \sqrt{5}\ vel\ \ k > -3 + \sqrt{5}$: la circonferenza è reale, il luogo è costituito da infiniti punti.
4. $R^2 < 0,\ \ -3 - \sqrt{5} < k < -3 + \sqrt{5}$: la circonferenza non è reale, il luogo è costituito da nessun punto.

QUESITO 3

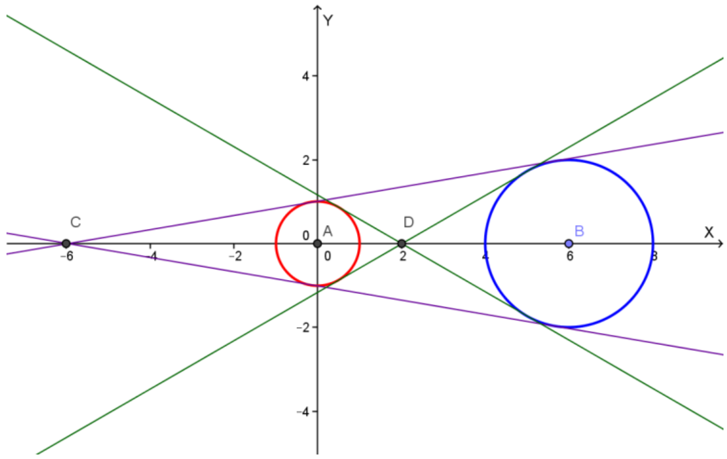
In un piano sono date due circonferenze non congruenti, l'una esterna all'altra. Di omotetie che trasformano la minore nella maggiore ve ne sono:

[A] nessuna   [B] una sola   [C] due soltanto   [D] infinite

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare in maniera esauriente la scelta operata.

La risposta corretta è la [C].

Esistono infatti due omotetie che trasformano la circonferenza minore di raggio r nella maggiore di raggio R: i centri sono nei punti di intersezione delle tangenti comuni (C e D) ed i rapporti sono R/r e –R/r:



QUESITO 4

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata l'affinità (A) di equazioni:

$x = -2X + 3Y, \quad y = X - 2Y$.

Calcolare l'area della figura trasformata di un cerchio di raggio 1 secondo l'affinità (A).

Il cerchio C di raggio 1 si trasforma in un'ellisse. Detto k il rapporto di affinità, per una nota proprietà delle affinità risulta:

$$\frac{Area(C')}{Area(C)} = |k|, \quad da\ cui: \quad Area(C') = |k| \cdot Area(C) = |k| \cdot (\pi \cdot 1^2) = \pi \cdot |k|$$

Siccome le equazioni fornite sono quelle dell'affinità inversa, tenendo presente che un'affinità diretta e la sua inversa hanno rapporti di affinità uno reciproco dell'altro, risulta:

$$\frac{1}{k} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1\,, \quad da\ cui\ k = 1$$

Quindi:

$$Area(C') = \pi \cdot |k| = \pi$$

QUESITO 5

Considerata la successione di termine generale:

$a_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$, *scriverla in forma ricorsiva.*

Supponendo che n parta da 1, la successione ha come elementi:

$$a_1 = 1 = 1^2, \quad a_2 = 5 = 1^2 + 2^2, \qquad a_3 = 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2, \quad in\ generale:$$

$$a_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

Quindi:

$$a_n = \begin{cases} 1 & se\ \ n = 1 \\ a_{n-1} + n^2 & se\ \ n > 1 \end{cases}$$

QUESITO 6

Scrivere un algoritmo che generi i primi 20 numeri della successione di cui al precedente quesito 5 e li comunichi sotto forma di matrice di 4 righe e 5 colonne.

Programma in Pascal che risolve il problema posto (utilizziamo una funzione ricorsiva che genera gli elementi della successione trovata nel quesito precedente in forma ricorsiva):

```
Program   q6;
 USES  Crt;
 VAR
     risposta :char;
     n,i,j:integer;
     A:array[1..4,1..5] of integer;
(*------------------------------------------------------------------*)
Function  an(k:integer):integer;
Begin
  if k=1 then an:=1 else
    begin
     an:=1;
     an:=an(k-1)+k*k;
    end
End;
(*-------------------------------------------------------------------*)
BEGIN (* main*)
 Repeat
   clrscr;
   writeln('Premi <invio> per generare gli elementi della successione');
   readln;
   For i:=1 to 4 do
    begin
      for j:=1 to 5 do
        begin
          A[i,j]:=an(j+5*(i-1));
          write(A[i,j]:5);
        end;
     writeln
    end;
   (*writeln('a(',i,')= ',an(i));   *)
   Write('                            ANCORA ? ( S / N )     ' );
   Readln(risposta);
 Until risposta in ['N','n']
END.
```

Il programma può essere provato on line copiandolo nell'apposita finestra al seguente link*:* http://www.tutorialspoint.com/compile_pascal_online.php

QUESITO 7

Si consideri la successione di termine generale:

$$a_n = \begin{cases} 2 & se\ \ n = 1 \\ \frac{1}{3} a_{n-1} & se\ \ n > 1 \end{cases}$$ calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si tratta di una progressione geometrica con primo termine 2 e ragione q=1/3. Quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2 \cdot \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots\right) =$$

$$= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right) = 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 3$$

N.B.

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}$ è la somma dei primi n termini di una progressione geometrica con primo termine $a_1 = 1$ e ragione $q = \frac{1}{3}$; tale somma è uguale a: $a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

QUESITO 8

Considerata la funzione f (x) tale che:

$$f(x) = \int_0^x (1-\ln t)\, dt\,, \qquad con\ \ x > 0\,,$$

determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

Per trovare gli zeri della funzione dobbiamo calcolare l'integrale. Risulta:

$$\int (1-lnx)dx = \int (x)'\,(1-lnx)dx = x(1-lnx) - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx = x(1-lnx) + x + c =$$

$= 2x - xlnx + c$. Quindi:

$$\int_0^x (1-\ln t)\, dt = \lim_{a\to 0^+} \int_a^x (1-\ln t)\, dt = \lim_{a\to 0^+} [2t - t \cdot lnt]_a^x =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} [2x - x \cdot lnx - 2a + a \cdot lna] = 2x - xlnx$$

(ricordiamo che $a \cdot lna$ tende a 0 se a tende a zero più).

Pertanto $f(x) = 2x - xlnx = 0 \ \ se\ \ 2 - lnx = 0,\ \ da\ cui\ \ x = e^2$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta poi:

$f'(x) = 1 - lnx$ e quindi:

$f'(x) > 0 \quad se \quad lnx < 1: \; 0 < x < e.$

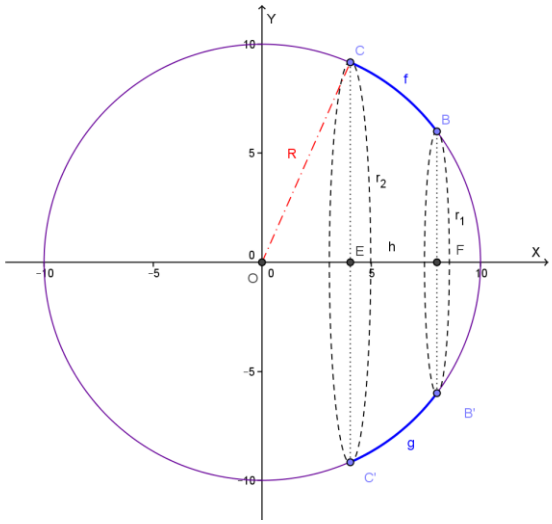
La funzione quindi cresce se $0 < x < e$ e decresce se $x > e$.

QUESITO 9

Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama segmento sferico a due basi. Indicati con r_1 ed r_2 i raggi delle due basi del segmento sferico e con h la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume V del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2).$$

Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.



Consideriamo la circonferenza con centro nell'origine degli assi cartesiani e raggio R. Il segmento sferico a due basi può essere ottenuto dalla rotazione attorno all'asse x

dell'arco CB di circonferenza di ordinate rispettivamente $r_2 ed\ r_1$. Osserviamo che le ascisse di C e B sono OE ed OF, con EF=h. Abbiamo:

$OE = x_C = \sqrt{R^2 - r_2^2} \quad e \quad OF = x_B = \sqrt{R^2 - r_1^2} \quad con \quad x_B = x_C + h \quad e \quad h = x_B - x_c,$
$h^2 = x_B^2 + x_C^2 - 2x_B x_C \quad da\ cui \quad x_B x_C = \frac{x_B^2 + x_C^2 - h^2}{2}$

Tenendo presente che la circonferenza ha equazione $x^2 + y^2 = R^2$, il volume del segmento sferico si può calcolare mediante il seguente integrale:

$V = \pi \int_{x_C}^{x_B} f^2(x)dx$ con $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$V = \pi \int_{x_C}^{x_B} (R^2 - x^2)dx = \pi \cdot \left[R^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{x_C}^{x_B} = \pi \cdot \left[R^2x_B - \frac{1}{3}x_B^3 - \left(R^2x_C - \frac{1}{3}x_C^3\right)\right] =$$

$$= \pi \cdot \left[R^2(x_B - x_C) - \frac{1}{3}(x_B^3 - x_C^3)\right] = \pi \cdot \left[R^2(x_B - x_C) - \frac{1}{3}(x_B - x_C)(x_B^2 + x_Bx_C + x_C^2)\right] =$$

$$= \pi \cdot (x_B - x_C)\left[R^2 - \frac{1}{3}(x_B^2 + x_Bx_C + x_C^2)\right] =$$

$$= \pi h\left[R^2 - \frac{1}{3}\left(x_B^2 + \frac{x_B^2 + x_C^2 - h^2}{2} + x_C^2\right)\right] = \pi h\left[R^2 - \frac{1}{6}(3x_B^2 + 3x_C^2 - h^2)\right] =$$

$$= \pi h\left[R^2 - \frac{1}{6}(3(R^2 - r_1^2) + 3(R^2 - r_2^2) - h^2)\right] = \pi h\left[R^2 - R^2 + \frac{1}{2}r_1^2 + \frac{1}{2}r_2^2 + \frac{1}{6}h^2\right] =$$

$= \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2) = V$ come volevasi dimostrare.

QUESITO 10

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t})\, dt}{sen^2x}$$

essendo e la base dei logaritmi naturali.

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Applichiamo la regola di de l'Hôpital, di cui sono soddisfatte le ipotesi (le funzioni al numeratore e al denominatore sono continue e derivabili e la derivata del denominatore non si annulla in un intorno dello 0 privato dello 0 stesso). Utilizzando il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{D\left[\int_0^x (1 - e^{-t})\, dt\right]}{D[sen^2x]} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{-x}}{2senxcosx} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{senx} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = \frac{1}{2} \quad quindi:$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t})\, dt}{sen^2x} = \frac{1}{2}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria