

## Scuole italiane all'estero (Americhe) 2004 – Quesiti

### QUESITO 1

La coppia  $(1, 2)$  è la soluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite. Quale può essere il sistema?

Osservando che  $1 + 2 = 3$  e che  $1 - 2 = -1$  un possibile sistema è:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

### QUESITO 2

Sia  $\alpha$  tale che la funzione  $f(x) = \alpha x - \frac{x^3}{1+x^2}$  risulti crescente. Provare che  $\alpha \geq \frac{9}{8}$ .

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \alpha - \frac{3x^2(1+x^2) - x^3(2x)}{(1+x^2)^2} = \alpha - \frac{3x^2 + x^4}{(1+x^2)^2} = \frac{\alpha(1+x^2)^2 - 3x^2 - x^4}{(1+x^2)^2} \geq 0 \text{ se:}$$

$$\alpha(1+x^2)^2 - 3x^2 - x^4 \geq 0, \quad \alpha(1+2x^2+x^4) - 3x^2 - x^4 \geq 0,$$

$$(\alpha - 1)x^4 + (2\alpha - 3)x^2 + \alpha \geq 0 \text{ (per ogni } x) \text{ se } \Delta \leq 0 \text{ e } \alpha - 1 > 0 \text{ (} \alpha > 1)$$

$$(2\alpha - 3)^2 - 4\alpha(\alpha - 1) \leq 0, \quad -8\alpha + 9 \leq 0, \quad \alpha \geq \frac{9}{8} \text{ (che soddisfa } \alpha > 1)$$

### QUESITO 3

Mostrare che le tangenti alla curva  $y = \frac{\pi \sin(x)}{x}$  in  $x = \pi$  e  $x = -\pi$  si intersecano ad angolo retto.

Calcoliamo la derivata della funzione:

$$y' = \pi \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}, \quad y'(\pi) = \pi \frac{-\pi}{\pi^2} = -1, \quad y'(-\pi) = \pi \frac{\pi}{\pi^2} = 1, \quad \text{quindi:}$$

$m \cdot m' = -1$  : le due tangenti sono perpendicolari.

### QUESITO 4

Nei saldi di fine stagione, un negozio ha diminuito del 30% il prezzo di listino di tutti gli articoli. Se il prezzo scontato di un abito è di 275 euro quale era il suo prezzo di listino?

Detto  $x$  il prezzo in euro di listino dell'abito risulta:

$$x = 275 + \frac{30}{100}x, \quad \frac{70}{100}x = 275, \quad x = \frac{275}{70}100 \cong 393$$

Il prezzo di listino dell'abito era di circa 393 euro.

### QUESITO 5

Calcolare:

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(x) dx$$

Calcoliamo per parti l'integrale indefinito:

$$I = \int e^x \cos(x) dx = \int (e^x)' \cos(x) dx = e^x \cos(x) - \int e^x (-\sin(x)) dx =$$

$$= e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx = e^x \cos(x) + \int (e^x)' (\sin(x)) dx =$$

$$= e^x \cos(x) + \left[ e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx \right] = e^x (\cos(x) + \sin(x)) - I ;$$

$$2I = e^x (\cos(x) + \sin(x)) \quad , \quad I = \int e^x \cos(x) dx = \frac{1}{2} e^x (\cos(x) + \sin(x)) + C$$

Pertanto:

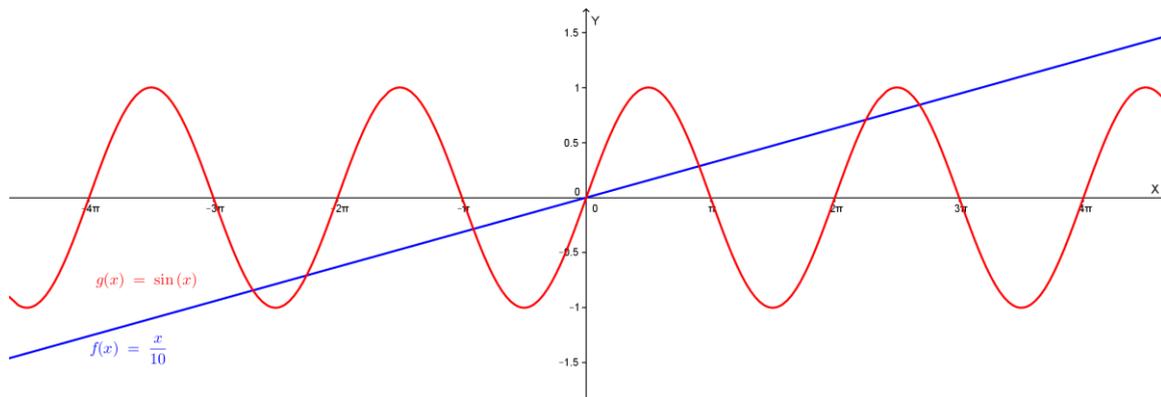
$$\int_0^{\pi} e^x \cos(x) dx = \left[ \frac{1}{2} e^x (\cos(x) + \sin(x)) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} e^{\pi} (-1) - \frac{1}{2} (1) = -\frac{1}{2} (e^{\pi} + 1)$$

### QUESITO 6

Si dica quante sono le soluzioni reali dell'equazione  $\frac{x}{10} = \sin(x)$  e si indichi per ciascuna di esse un intervallo numerico che la comprende.

Rappresentiamo graficamente le due funzioni:  $f(x) = \frac{x}{10}$  e  $g(x) = \sin(x)$ .

Le soluzioni dell'equazione data corrispondono alle ascisse dei punti di intersezioni fra i grafici delle due funzioni.



L'equazione ammette 7 soluzioni, di cui una nulla e le altre 6 a due a due opposte; le soluzioni positive  $x_1, x_2$  e  $x_3$  appartengono ai seguenti intervalli:

$$\frac{\pi}{2} < x_1 < \pi, \quad 2\pi < x_2 < \frac{5}{2}\pi, \quad \frac{5}{2}\pi < x_3 < 3\pi$$

### QUESITO 7

Se  $\operatorname{tg}\alpha$  e  $\operatorname{tg}\beta$  sono radici di  $x^2 - px + q = 0$  e  $\operatorname{ctg}\alpha$  e  $\operatorname{ctg}\beta$  sono radici di  $x^2 - rx + s = 0$ , quanto vale il prodotto  $rs$  espresso in funzione di  $p$  e  $q$ ?

Per una nota proprietà sulla la somma e sul prodotto delle radici dell'equazione di secondo grado  $ax^2 + bx + c = 0$  risulta:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  e  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ .

Da  $x^2 - px + q = 0$ :  $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = p$ ,  $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = q$

Da  $x^2 - rx + s = 0$ :  $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = r$ ,  $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta = s$

Da  $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = r$  segue:  $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = r$ ,  $\frac{\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{p}{q} = r$

Da  $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta = s$  segue:  $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{q} = s$ . Quindi:

$$rs = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{q^2} = rs$$

### QUESITO 8

Un professore interroga i suoi alunni a due per volta. Stabilire quante possibili coppie diverse può interrogare, sapendo che la classe è di 20 studenti.

Si tratta delle combinazioni di 20 oggetti a 2 a 2, quindi:  $C_{20,2} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2!} = 190$ .

Con la collaborazione di Angela Santamaria