

Americhe emisfero boreale 2004 – Sessione suppletiva

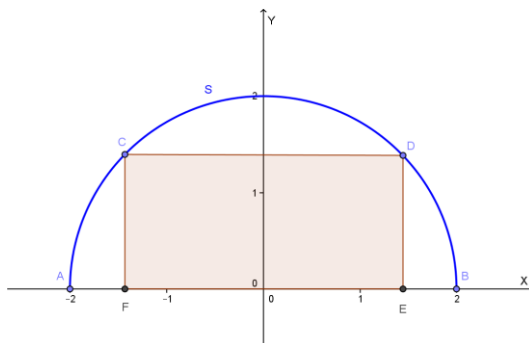
PROBLEMA 2

Sia S un semicerchio di raggio 2. Si introduca nel piano cartesiano del semicerchio un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche xy e si determinino:

a)

Le dimensioni del rettangolo R di area massima inscritto in S e tale valore massimo.

Fissiamo il sistema di riferimento come in figura:



Posto $D = (x, y)$, con $0 < x < 2$, $0 < y < 2$ e $x^2 + y^2 = 4$, l'area del rettangolo R è:

$Area = 2xy = 2x\sqrt{4 - x^2}$, che è massima se lo è $x\sqrt{4 - x^2}$; essendo tale quantità positiva, essa è massima quando è massimo il suo quadrato: $z = x^2(4 - x^2)$

Metodo delle derivate:

$$z' = 2x(4 - x^2) + x^2(-2x) = -4x^3 + 8x \geq 0 \text{ se } 4x(-x^2 + 2) \geq 0, \quad -x^2 + 2 \geq 0,$$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Essendoci la condizione $0 < x < 2$, la funzione è quindi crescente se $0 < x < \sqrt{2}$ e decrescente se $\sqrt{2} < x < 2$; pertanto è massima se $x = \sqrt{2}$.

Metodo elementare:

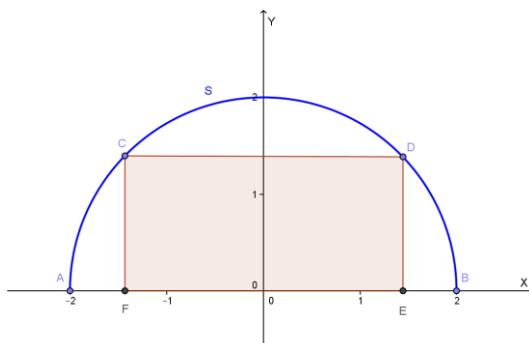
$z = x^2(4 - x^2)$ è il prodotto di due quantità a somma costante (4) quindi è massimo se le due quantità sono uguali cioè se: $x^2 = 4 - x^2$, $x^2 = 2$, $x = \sqrt{2}$.

Il rettangolo R che ha area massima è quello di vertici

$E = (\sqrt{2}; 0)$, $D = (\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $C = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $F = (-\sqrt{2}; 0)$. L'area massima vale 4.

b)

L'area di ciascuna delle 3 parti che con R compongono S;



E' sufficiente calcolare l'area del triangolo mistilineo BDE, che si ottiene sottraendo al settore circolare DOB il triangolo DOE. Osserviamo che $OE = DE = y = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2}$, quindi l'angolo DOE misura 45° , pertanto il settore circolare DOB è l'ottava parte del cerchio. Perciò:

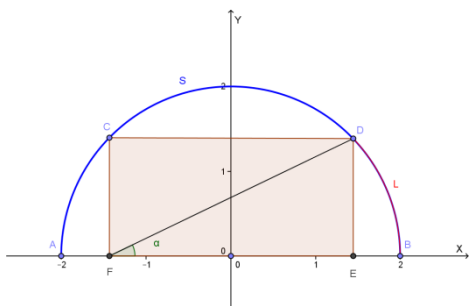
$$\begin{aligned} \text{Area}(\text{tr. mist. BDE}) &= \text{Area}(\text{settore circ. DOB}) - \text{Area}(\text{triang. DOE}) = \frac{1}{8}(\pi \cdot 2^2) - 1 = \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 = \text{Area}(\text{tr. mist. ACF}) \end{aligned}$$

La terza parte richiesta (il segmento circolare di base CD) si ottiene per sottrazione:

$$\begin{aligned} \text{Area}(\text{segm. circ.}) &= \text{Area}(\text{semicerchio}) - \text{Area}(\text{rettangolo}) - 2\text{Area}(\text{tr. mist. BDE}) = \\ &= 2\pi - 4 - 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2 \end{aligned}$$

c)

Un'approssimazione in gradi sessagesimali dell'angolo che ciascuna diagonale di R forma con il diametro di S e la misura del corrispondente arco staccato su S.



L'angolo α tra FD ed il diametro AB si ottiene nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\alpha) &= \frac{DE}{FE} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \alpha = \text{tg}^{-1}(0.5) \cong \\ &\cong 0.46 \text{ rad} \cong 26.57^\circ \end{aligned}$$

Ricordando che $\widehat{DOE} = \frac{\pi}{4}$, l'arco L richiesto si ottiene dalla relazione: $\frac{\pi}{4} = \frac{L}{r}$

$$\text{Da cui: } L = \frac{\pi}{4} \cdot r = \frac{\pi}{4} \cdot 2 = \frac{\pi}{2} = 1.57.$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria