Americhe emisfero boreale 2004 - Suppletiva - Quesiti

QUESITO 1

Della funzione $f\ (x)$ si sa che: $f''(x) = 2^x, f'(0) = 0, f(0) = \left(\frac{1}{log2}\right)^2$. Quale è $f(x)$?

$$\boldsymbol{N.B. Supponiamo\ che\ con\ \log\ si\ intenda\ il\ logaritmo\ naturale\ ln}$$

Da $f''(x) = 2^x$ integrando otteniamo: $f'(x) = \int 2^x\, dx = \frac{2^x}{ln2} + c$

Da $f'(0) = 0$ deduciamo: $\frac{1}{ln2} + c = 0,\ \ c = -\frac{1}{ln2}$ quindi: $f'(x) = \frac{2^x}{ln2} - \frac{1}{ln2}$

Integrando ancora:

$$f(x) = \int \left(\frac{2^x}{ln2} - \frac{1}{ln2}\right) dx = \frac{2^x}{\ln^2 2} - \frac{x}{ln2} + k$$

Da $f(0) = \left(\frac{1}{log2}\right)^2$ deduciamo infine: $\frac{1}{\ln^2 2} + k = \left(\frac{1}{ln2}\right)^2$, $k = 0$. Quindi:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2^x}{\ln^2 2} - \frac{x}{ln2}}.$$

QUESITO 2

Determinare la derivata della funzione $\sqrt{x}$ usando la definizione.

In base alla definizione di derivata si ha:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

QUESITO 3

Determinare un polinomio P(x) tale che:

$$P(0) = P(1) = 0, \qquad P'(1) = 1 \quad e \quad \int_0^1 P(x)dx = 1.$$

La prima condizione ci suggerisce un polinomio del tipo $P(x) = ax(x-1)(x-b)$

Risulta: $P'(x) = a(x-1)(x-b) + ax(x-b) + ax(x-1)$ e da $P'(1) = 1$ otteniamo: $\boldsymbol{a(1-b) = 1}$.

Imponiamo l'ultima condizione, notando che $P(x) = ax^3 - abx^2 - ax^2 + abx$

$$\int_0^1 P(x)dx = \int_0^1 (ax^3 - abx^2 - ax^2 + abx)dx = \left[\frac{1}{4}ax^4 - \frac{1}{3}abx^3 - \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}abx^2\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{4}a - \frac{1}{3}ab - \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}ab = 1, \quad a(3 - 4b - 4 + 6b) = 12; \; \boldsymbol{a(2b-1) = 12}$$

Per trovare a e b dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} a(1-b) = 1 \\ a(2b-1) = 12 \end{cases}; \quad \begin{cases} a = \dfrac{1}{1-b} \quad (b = 1 \; non \; è \; soluzione); \\ \dfrac{1}{1-b}(2b-1) = 12\,; \quad 2b - 1 = 12 - 12b; \quad b = \dfrac{13}{14} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{1-b} = a = \dfrac{1}{1-\dfrac{13}{14}} = 14 \\ b = \dfrac{13}{14} \end{cases}$$

Un polinomio che soddisfa le condizioni richieste è quindi:

$$P(x) = 14x(x-1)\left(x - \frac{13}{14}\right) = 14x^3 - 27x^2 + 13x$$

QUESITO 4

Sia a un parametro reale e sia f una funzione definita da

$$(a-x)f(x-a) + f(a-x) = a - x\,, \qquad per \; ogni \;\; x \in R.$$

Determinare f .

Per x=a deve essere: $f(0) = 0$. Se $x \neq a$, dividendo per $(a-x)$ la relazione diventa:

$$f(x-a) + \frac{f(a-x)}{a-x} = 1\,; \quad posto: \; a - x = t \; si \; ha: \; f(-t) + \frac{f(t)}{t} = 1, \qquad da \; cui:$$

$$f(t) = t - t \cdot f(-t) \quad (*)$$

Quindi: $f(-t) = -t + t \cdot f(t)$ e sostituendo nella (*):

$$f(t) = t - t[-t + t \cdot f(t)] = t + t^2 - t^2 f(t), \qquad (1 + t^2)f(t) = t^2 + t, quindi:$$

$f(t) = \dfrac{t^2 + t}{t^2 + 1}$ $(notiamo\ che\ risulta\ f(0) = 0, \quad cioè\ vale\ anche\ se\ t = 0, ossia\ x = a)$

La funzione f richiesta ha dunque equazione:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$$

Si può facilmente verificare per via diretta che, per ogni x, risulta:

$(a - x)f(x - a) + f(a - x)$ è esattamente uguale ad $a - x$.

QUESITO 5

Nel piano Oxy l'equazione $x^2 - 100 = 0$ *rappresenta:*

a) una parabola;
b) la circonferenza di centro l'origine e raggio 10;
c) l'unione di due rette parallele;
d) il punto di intersezione di due rette.

Motivare la risposta.

L'equazione può essere vista nella forma $(x - 10)(x + 10) = 0$ che equivale all'unione delle due rette parallele di equazioni $x - 10 = 0\ e\ x + 10 = 0$.
La risposta corretta è quindi la c).

QUESITO 6

Sapendo che

$$\lim_{x \to 4} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 1,$$

trovare il

$$\lim_{x \to 4} f(x).$$

Dal limite in ipotesi segue che $\lim_{x \to 4} \frac{f(x)-5}{4-2} = 1\ da\ cui\ \lim_{x \to 4}(f(x) - 5) = 2,\ quindi:$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 7$$

QUESITO 7

Si spieghi perché la derivata di $\sin x$ è $\cos x$ e si calcoli la derivata d'ordine 725 di $\sin x$.

Calcoliamo la derivata di f(x)=sin(x) servendoci della definizione di derivata (utilizziamo le formule di prostaferesi):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{sin(x+h)-\sin(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2sin\left(\frac{h}{2}\right)cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right]cos(x) = 1\cdot\cos(x) = \cos(x)$$

Calcoliamo le derivate successive di $f(x) = sin(x)$:

$$f'(x) = \cos(x)\,,\qquad f''(x) = -\sin(x)\,,\qquad f'''(x) = -\cos(x)\,,\qquad f^{(4)} = \sin(x)$$

Quindi ogni quattro derivate si ritorna alla funzione di partenza; osserviamo che:

$$725 = 4\cdot 181 + 1$$

Quindi la derivata di ordine 724 riporta a sin(x); la derivata di ordine 725 è uguale alla derivata prima, pertanto:

$$f^{(725)}(x) = f'(x) = cosx$$

QUESITO 8

Si dia un esempio di solido il cui volume sia $40\,\pi$.

Tenendo presente che il volume di un cilindro è dato da: $V = \pi r^2 h$, possiamo vedere 40 come il prodotto fra 4 e 10, quindi:

$$\pi r^2 h = \pi\cdot 2^2\cdot 10\ (r = 2, h = 10).$$

Un solido di volume $\pi r^2 h$ è quindi, per esempio, un cilindro con raggio di base 2 e altezza 10.

Con la collaborazione di Stefano Scoleri e Angela Santamaria