Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2004

QUESITO 1

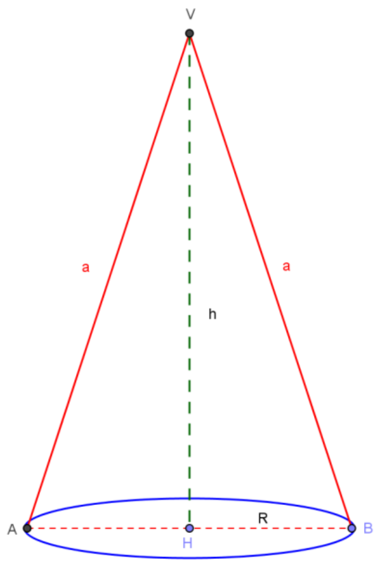
Si dia un esempio di sistema lineare di due equazioni in due incognite compatibile, la cui soluzione è la coppia (-1, 2) e si esponga il ragionamento seguito.

Posto x=-1 e y=2, due relazioni indipendenti fra x e y sono per esempio:
x+y=1 e x-y=-3. Un sistema che ha la (sola) soluzione richiesta è quindi:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-3 \end{cases}$$

QUESITO 2

Quale è la capacità massima di un cono circolare retto di apotema 12 cm? Quale ne è il valore in litri?



Il volume del cono è:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Risulta: $R^2=a^2-h^2$, quindi:

$$V=\frac{1}{3}\pi(a^2-h^2)h$$

Il volume è massimo se lo è $y=h(a^2-h^2)=f(h)$ con $0\le h\le a$.

Metodo elementare.

$h(a^2-h^2)=(h^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(a^2-h^2)$ è il prodotto di due potenze la cui somma delle basi è costante (a^2), quindi è massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti:

$$\frac{h^2}{\frac{1}{2}}=\frac{a^2-h^2}{1},\quad 2h^2=a^2-h^2,\qquad h^2=\frac{1}{3}a^2,\qquad h=a\frac{\sqrt{3}}{3}=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}\ cm$$

Per tale valore di h si ha: $R^2=a^2-h^2=12^2-48=96\ cm^2$.

Il volume massimo è quindi:

$V(massimo) = \frac{1}{3}\pi(96)\cdot 4\sqrt{3} = 128\sqrt{3}\,\pi\ cm^3 \cong 696.458\ cm^3 \cong 0.696\ dm^3 = 0.696\ l$

Metodo analitico.

Dobbiamo trovare il massimo della $f(h) = h(a^2 - h^2)$ con $0 \le h \le a$. Risulta:

$$f' = a^2 - h^2 + h(-2h) = a^2 - 3h^2 \ge 0 \quad se \quad -a\frac{\sqrt{3}}{3} \le h \le a\frac{\sqrt{3}}{3}$$

f è quindi crescente per $0 \le h < a\frac{\sqrt{3}}{3}$ e decrescente per $a\frac{\sqrt{3}}{3} < h < a$: è quindi massima per $h = a\frac{\sqrt{3}}{3} = 12\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\ cm$, come trovato precedentemente.

QUESITO 3

Si dimostri che la derivata n-esima di un polinomio P(x) di grado $n-1$ è zero.

Ogni derivata di una funzione polinomiale abbassa di 1 il grado del polinomio, quindi la derivata prima di un polinomio di grado n-1 è un polinomio di grado n-2, la derivata seconda è un polinomio di grado n-3, la derivata di ordine r è un polinomio di grado n-(r+1), la derivata di ordina n-1 è un polinomio di grado n-(n-1+1)= 0, cioè una costante; la derivata di ordine n è quindi 0.
Esempi: la derivata seconda di un polinomio di primo grado è 0, la derivata terza di un polinomio di secondo grado è 0, etc.

QUESITO 4

Si considerino gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a,b,c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

Il numero delle applicazioni di A in B corrisponde al numero delle disposizioni con ripetizioni di 3 oggetti (quelli del secondo insieme) a 4 a 4 (quelli del primo insieme), che è pari a $\mathbf{3^4 = 81}$.

Nel nostro caso abbiamo le seguenti possibilità:

L'1 può andare in a, b, c. Lo stesso per il 2, il 3 ed il 4.
Quindi i casi possibili sono: 3x3x3x3 = 3^4 = 81.

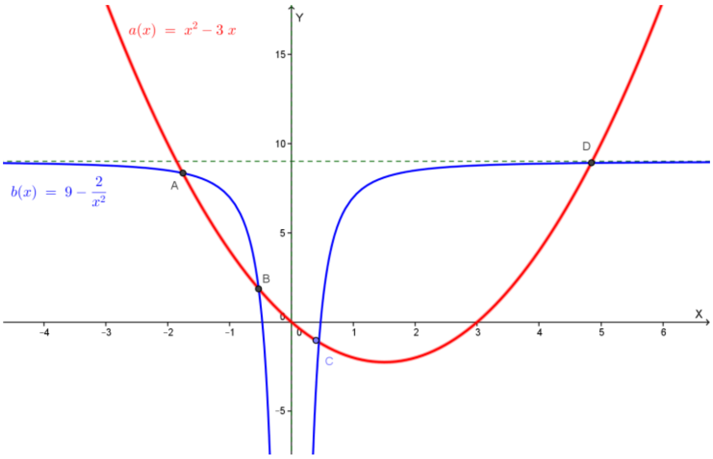
QUESITO 5

Se $f(x) = x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 4$, quanti sono i numeri reali k per i quali è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito per giungere alla risposta.

Dobbiamo trovare il numero di soluzioni dell'equazione $x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 4 = 2$ equivalente a : $x^4 - 3x^3 - 9x^2 + 2 = 0$. Osservato che x=0 non è soluzione dell'equazione, dividendo per x^2 l'equazione può essere scritta nella forma:

$$x^2 - 3x = 9 - \frac{2}{x^2}$$

Posto $a(x) = x^2 - 3x$ e $b(x) = 9 - \frac{2}{x^2}$, le soluzioni dell'equazione equivalgono alle ascisse dei punti di intersezione dei grafici di queste due funzioni, che sono facilmente rappresentabili in modo qualitativo come mostra la figura seguente:



Valutando a(x) e b(x) in -2, -1 e -3/4 si deduce che per x<0 le due curve si intersecano in due punti.

Dal grafico si deduce che le soluzioni richieste sono 4.

QUESITO 6

Nei saldi di fine stagione, un negozio ha diminuito del 25% il prezzo di listino di tutti gli articoli. Se il prezzo scontato di un abito è di 210 euro quale era il suo prezzo di listino?

Detto x il prezzo in euro di listino dell'abito risulta:

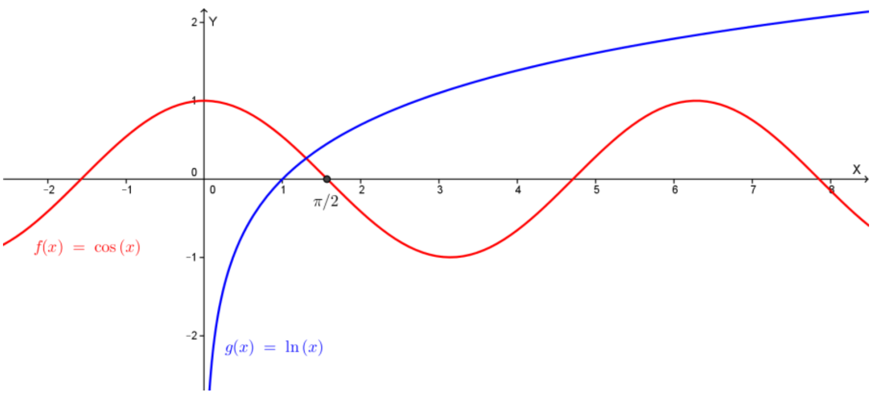
$$x = 210 + \frac{25}{100}x, \quad \frac{75}{100}x = 210, \quad x = \frac{210}{75} \cdot 100 = 280$$

Il prezzo di listino dell'abito era di 280 euro.

QUESITO 7

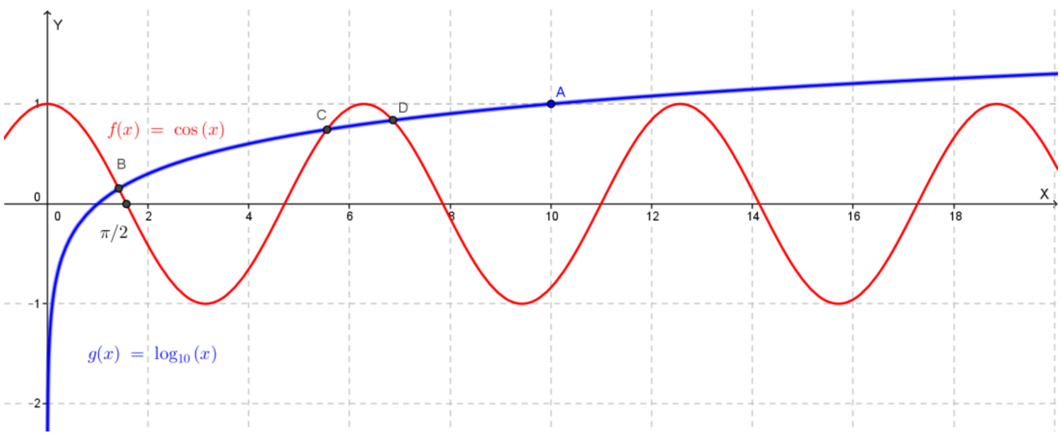
Dire quante soluzioni reali ammette l'equazione $\cos x - \log x = 0$.
C'è una radice positiva tra 1 e 2? Si illustri il ragionamento seguito.

Rappresentiamo nello stesso sistema cartesiano le due funzioni $y = \cos x \;\; e \;\; y = \log x$ (intendiamo il logaritmo come logaritmo naturale) e osserviamo che la funzione logaritmica vale 1 se x=e, poi, per x>e supera 1; quindi dopo $\frac{\pi}{2}$ il grafico della funzione logaritmica è sempre sopra.



Le soluzioni dell'equazione corrispondono alle ascisse dei punti di incontro delle due curve; le curve si incontrano in un solo punto, quindi l'equazione ha una sola soluzione. La radice è compresa fra $1 \;\; e \;\; \frac{\pi}{2}$, quindi c'è una soluzione positiva compresa fra 1 e 2.

Se il logaritmo è in base 10 la situazione grafica è la seguente:



Se il logaritmo è in base 10 l'equazione ammette 3 soluzioni reali (positive) e c'è una radice positiva tra 1 e 2.

QUESITO 8

Calcolare: $\int_o^{\pi} e^x \cos x \ dx$.

Calcoliamo per parti l'integrale indefinito:

$$I = \int e^x \cos(x)\, dx = \int (e^x)' \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) - \int e^x(-\sin(x))dx =$$

$$= e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx = e^x \cos(x) + \int (e^x)'(\sin(x))\, dx =$$

$$= \ e^x \cos(x) + \left[e^x \sin(x) - \int e^x \cos(\mathrm{x})\, dx\right] = e^x(\cos(x) + \sin(x)) - I \ \ ;$$

$$2I = e^x(\cos(x) + \sin(x)) \quad , \quad I = \int e^x \cos(x)\, dx = \frac{1}{2} e^x(\cos(x) + \sin(x)) + C$$

Pertanto:

$$\int_0^{\pi} e^x \cos(x)\, dx = \left[\frac{1}{2} e^x(\cos(x) + \sin(x))\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} e^{\pi}(-1) - \frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2}(e^{\pi} + 1)$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria