

Americhe emisfero australe 2004 – Sessione suppletiva

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione determinata da

$$x = \frac{2}{\sqrt{y+1}}.$$

1)

Si studi e si disegni il suo grafico γ .

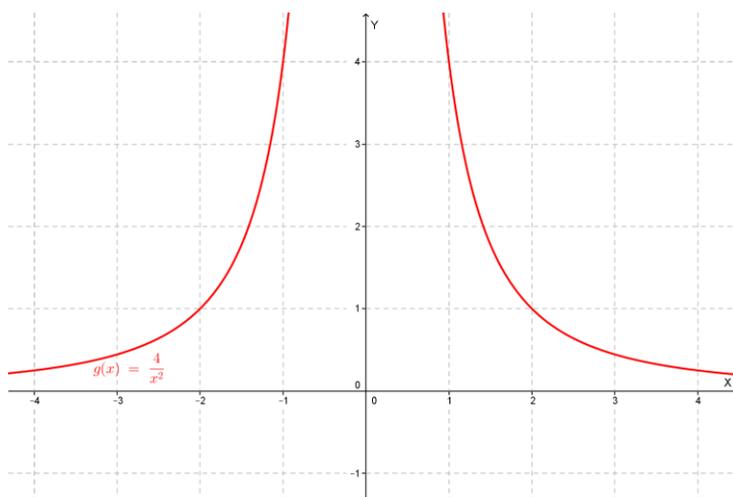
Esprimiamo la funzione nella forma $y = f(x)$.

Ponendo $x > 0$ ed $y > -1$, elevando al quadrato membro a membro otteniamo:

$$x^2 = \frac{4}{y+1}, \quad x^2(y+1) = 4, \quad x^2y = 4 - x^2, \quad y = \frac{4 - x^2}{x^2} = \frac{4}{x^2} - 1 \quad (\text{con } x > 0, y > -1)$$

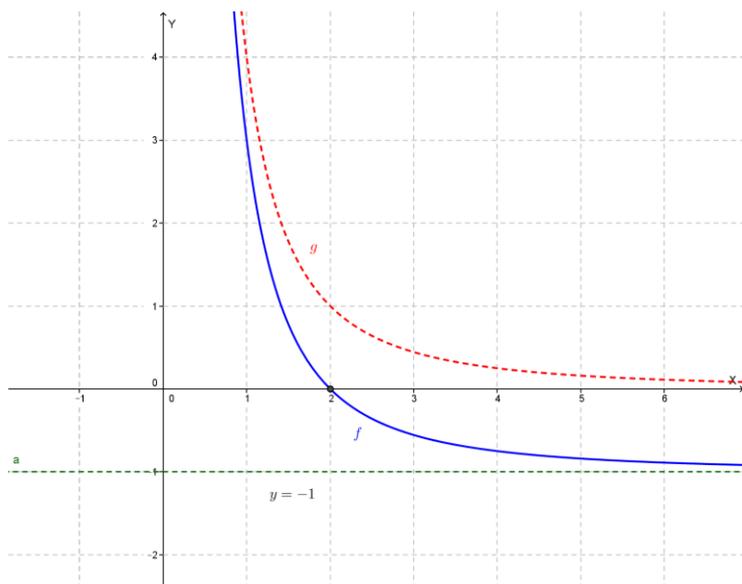
Dobbiamo quindi studiare la funzione $y = \frac{4}{x^2} - 1$ (con $x > 0$)

Il grafico di questa funzione si ottiene da quello di $y = g(x) = \frac{4}{x^2}$ (per $x > 0$) con una traslazione di 1 verso il basso. Questa funzione si può rappresentare facilmente:



Il grafico di f si ottiene dal grafico di g relativo ad $x > 0$ traslando verso il basso di 1.

Il grafico richiesto è quindi il seguente:

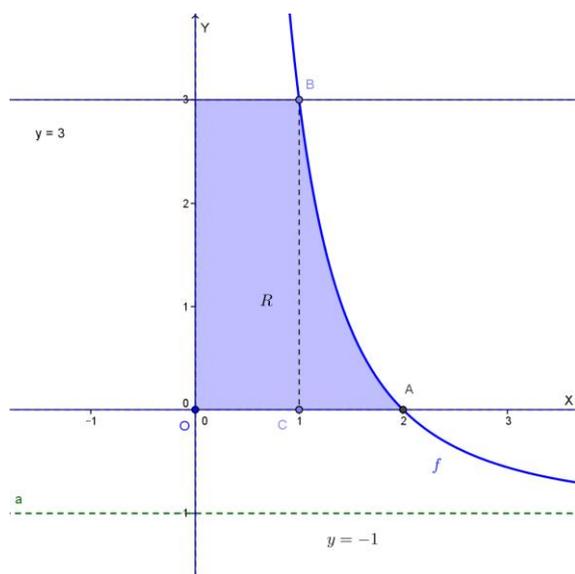


Il grafico γ richiesto è situato nel semipiano delle x positive, è sempre decrescente, ha gli asintoti $x=0$ e $y=-1$, taglia l'asse x nel punto di ascissa 2 ed ha la concavità sempre rivolta verso l'alto.

2)

Si calcoli l'area della regione R racchiusa tra γ , gli assi coordinati e la retta $y = 3$.

La regione R è rappresentata nella figura seguente:



L'area della regione R è uguale all'area del rettangolo di dimensioni 1 e 3 sommata all'area del trapezoido ABC , che si ottiene calcolando il seguente integrale:

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - 1 \right) dx = \left[-\frac{4}{x} - x \right]_1^2 = -2 - 2 - (-4 - 1) = 1$$

Si ha quindi:

$$\text{Area}(R) = 3 + 1 = 4 u^2 .$$

3)

Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R intorno all'asse y .

Ricordando che f è espressa dall'equazione $x = \frac{2}{\sqrt{y+1}}$, il volume richiesto è dato da:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 \left(\frac{2}{\sqrt{y+1}} \right)^2 dy = \pi \int_0^3 \frac{4}{y+1} dy = \pi [4 \ln|y+1|]_0^3 = \pi [4 \ln 4 - 0] = \\ &= (4\pi \cdot \ln 4) u^3 \cong 17.421 u^3 . \end{aligned}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria