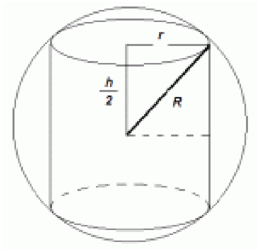
# Americhe emisfero australe 2004 – Sessione suppletiva - Questionario

## QUESITO 1

*Si spieghi perché la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta 4.*




Il diametro di base $2r$ del cilindro equilatero è uguale all'altezza $h$, quindi $r = \frac{h}{2}$ . Detto R il raggio della sfera circoscritta al cilindro si ha:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 + r^2 = 2r^2, \;\; R = r\sqrt{2}$$

Calcoliamo le superfici totali dei due solidi:

$$S_{tot}(cilindro) = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(2r) + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$$
$$S_{tot}(sfera) = 4\pi R^2 = 4\pi\left(r\sqrt{2}\right)^2 = 8\,\pi r^2$$

Il rapporto richiesto è:

$$p = \frac{S_{tot}(cilindro)}{S_{tot}(sfera)} = \frac{6\pi r^2}{8\,\pi r^2} = \frac{3}{4}$$

## QUESITO 2

*Si enunci il teorema di Lagrange o del valor medio; se ne illustri il significato geometrico, il legame col teorema di Rolle e le implicazioni ai fini della determinazione del grafico di una funzione.*

Il teorema di Lagrange afferma che se una funzione y=f(x) è continua nell'intervallo chiuso e limitato [a; b] e derivabile nell'intervallo (a; b) allora esiste almeno un punto c in (a; b) tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

Osserviamo che i punti $A = \big(a; f(a)\big)\ \ e\ \ B = (b; f(b))$ sono gli estremi del grafico della funzione di equazione y=f(x); inoltre $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta AB ed $f'(c)$ è il coefficiente angolare della tangente al grafico nel punto di ascissa c.
Il significato geometrico del teorema di Lagrange è quindi il seguente:

nelle ipotesi del teorema esiste almeno un punto interno all'arco di curva AB in cui la tangente è parallela alla congiungente i punti A e B.

Legame con il teorema di Rolle.
Il teorema di Rolle può essere considerato un corollario del teorema di Lagrange. In esso si aggiunge l'ipotesi che f(a)=f(b) e si ha come tesi: esiste almeno un punto c in (a; b) tale che: $f'(c) = 0$. Dal teorema di Lagrange si ha infatti:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{0}{b - a} = 0.$$

Il significato geometrico diventa ora: esiste almeno un punto C del grafico della funzione tra $A = \big(a; f(a)\big)\ \ e\ \ B = (b; f(b))$ a tangente orizzontale.

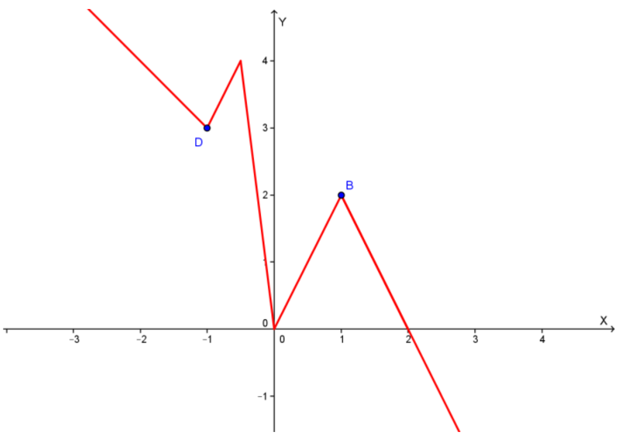
Implicazione del teorema di Lagrange nello studio di una funzione.

Come corollario del teorema di Lagrange si dimostra che se la derivata di una funzione è sempre positiva (negativa) nei punti interni di un intervallo chiuso e limitato [a; b], allora la funzione è crescente (decrescente) in tale intervallo.

## QUESITO 3

*Esiste una funzione f (x) con un massimo relativo in (1, 2) e un minimo relativo in (-1, 3)? Se sì, se ne può fornire un esempio?*

Il grafico seguente fornisce un semplice esempio di funzione che soddisfa le condizioni imposte:



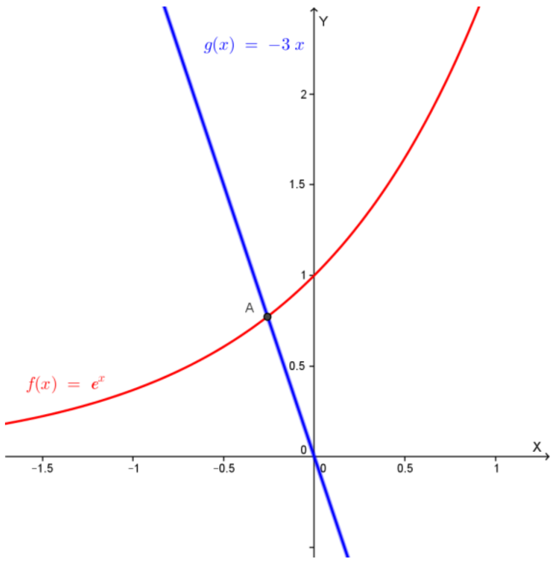

L'equazione della funzione (definita a tratti) può essere facilmente scritta a partire dalle equazioni delle rette che la compongono.

## QUESITO 4

*L'equazione* $e^x + 3x = 0$ *ammette soluzioni reali? Quale ragionamento può seguirsi per rispondere al quesito?*

L'equazione può essere scritta nella forma $e^x = -3x$, quindi le eventuali soluzioni reali sono date dalle ascisse dei punti di intersezione dei grafici delle funzioni di equazioni

$$f(x) = e^x \quad e \quad g(x) = -3x$$




Dal grafico si deduce che l'equazione ha una sola soluzione (compresa fra -0.5 e 0).

## QUESITO 5

*Come si può trovare il*

$$\lim_{x\to 4} f(x)$$

*partendo dalla conoscenza che il*

$$\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-5}{x-2} = 1?$$

*Dal limite in ipotesi segue che* $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-5}{4-2} = 1$ *da cui* $\lim_{x\to 4}(f(x)-5) = 2$, *quindi*:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 7$$

## QUESITO 6

*Di una funzione g(x), non costante, si sa che:*

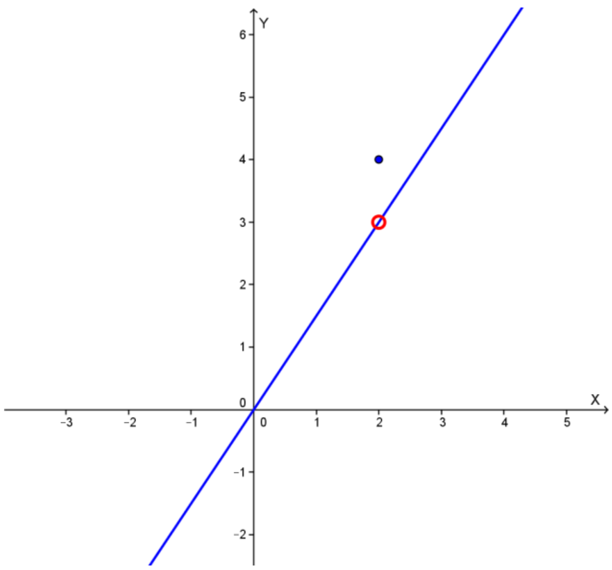
$$\lim_{x\to 2} g(x) = 3 \quad \text{e} \quad g(2) = 4.$$

*Trovate una espressione di g (x).*

Una possibile funzione è la seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x \ , & se \ \ x \neq 2 \\ 4 \ , & se \ x = 2 \end{cases}$$

Il grafico è il seguente:




## QUESITO 7

*Calcolate:*

$$\int_0^1 \arcsin x \ dx \ .$$

Cerchiamo una primitiva di $arcsin(x)$ integrando per parti:

$$\int \arcsin x \ dx = \int (x)' \cdot \arcsin x \ dx = x \cdot arcsin(x) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ dx =$$
$$= \ x \cdot arcsin(x) + \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \ dx = x \cdot arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + k$$

Risulta quindi:

$$\int_0^1 \arcsin x \; dx = \left[x \cdot arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\right]_0^1 = 1 \cdot \frac{\pi}{2} - (0+1) = \frac{\pi}{2} - 1$$

## QUESITO 8

*Siano dati gli insiemi*

$$A = \{\Phi, \Sigma, \Omega, \Psi\} \quad e \quad B = \{a, b, c\} \; ;$$

*quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?*

Consideriamo i due insiemi: $A = \{\Phi, \Sigma, \Omega, \Psi\}$ $e$ $B = \{a, b, c\}$. Si chiede di determinare il numero delle applicazioni (funzioni) di A in B.

Tale numero corrisponde al numero delle disposizioni con ripetizioni di 3 oggetti (quelli del secondo insieme) a 4 a 4 (quelli del primo insieme), che è pari a $\mathbf{3^4 = 81}$.

Nel nostro caso abbiamo le seguenti possibilità:

$\Phi$ può andare in a, b, c. Lo stesso per $\Sigma$, $\Omega$ e $\Psi$. Quindi i casi possibili sono:

3x3x3x3 = $3^4$ = 81.

Con la collaborazione di Angela Santamaria