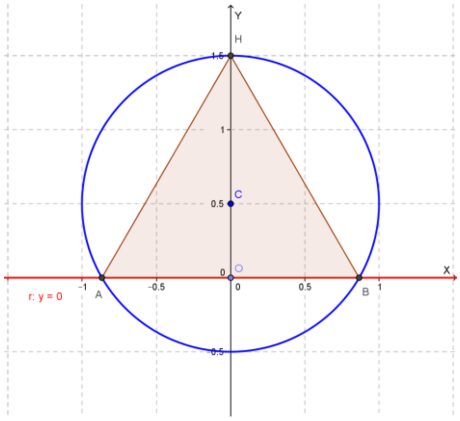
Scuole italiane all'estero (Europa) 2004 – PROBLEMA 1

In un piano sono assegnati una retta r ed un punto H la cui distanza da r è 3/2 rispetto ad una data unità di misura delle lunghezze.

a)

Dopo aver riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), determinare sulla retta r due punti A e B tali che il triangolo HAB sia equilatero e trovare l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo.



Siccome l'altezza del triangolo equilatero inscritto in una circonferenza è uguale ai 3/2 del raggio, fissiamo il sistema di riferimento in modo che H stia sull'asse y con coordinate $H = \left(0; \frac{3}{2}\right)$. In tal modo la circonferenza ha centro in $C = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ e raggio $r = 1$ e la retta r ha equazione $y = 0$. I punti A e B hanno coordinate: $A = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

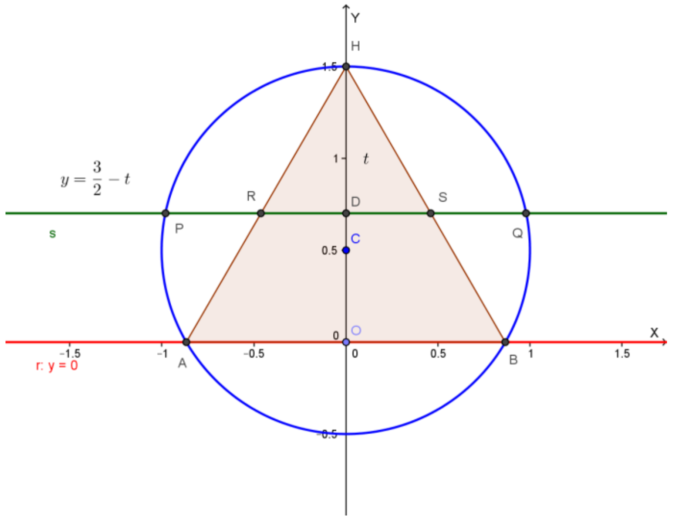
L'equazione della circonferenza è: $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$, $\quad x^2 + y^2 - y - \frac{3}{4} = 0$

b)

Determinare l'equazione in t che risolve la seguente questione:
«Condurre, ad una distanza t dal punto H, la retta s parallela ad r in modo che intersechi la circonferenza e il triangolo suddetti e, indicate con PQ ed RS le corde che su tale retta s intercettano nell'ordine la circonferenza e il triangolo medesimi, risulti: $\overline{PQ} = k\,\overline{RS}$ *, dove k è un parametro reale assegnato».*

Le condizioni imposte impongono la seguente condizione su t: $0 < t \le \frac{3}{2}$.

La retta s ha equazione: $y = \frac{3}{2} - t,\ \ con\ \ 0 < t \le \frac{3}{2}$.



Cerchiamo le intersezioni P e Q fra la retta s e la circonferenza:

$$P, Q: \begin{cases} y = \dfrac{3}{2} - t \\ x^2 + y^2 - y - \dfrac{3}{4} = 0 \end{cases} , \quad x^2 + \left(\frac{3}{2} - t\right)^2 - \frac{3}{2} + t - \frac{3}{4} = 0\ ,$$

$$x^2 = -t^2 + 2t\ ,\ \ x = \pm\sqrt{2t - t^2}$$

Quindi: $P = \left(-\sqrt{2t - t^2};\ \frac{3}{2} - t\right),\ Q = \left(\sqrt{2t - t^2}; \frac{3}{2} - t\right)$.

Cerchiamo le intersezioni R ed S fra la retta s e la retta AH che ha equazione $y = mx + \frac{3}{2}$ con $m = tg60° = \sqrt{3}$, quindi: $y = \sqrt{3}\,x + \frac{3}{2}$.

$$R: \begin{cases} y = \dfrac{3}{2} - t \\ y = \sqrt{3}\,x + \dfrac{3}{2} \end{cases} ; \quad \sqrt{3}\,x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - t\ ,\ \ x = -\frac{t}{\sqrt{3}}:\ R = \left(-\frac{t}{\sqrt{3}}\ ;\ \frac{3}{2} - t\right)\ ;\ S = \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\ ;\ \frac{3}{2} - t\right)$$

Si ha quindi:

$PQ = 2\sqrt{2t - t^2}$, $RS = \frac{2t}{\sqrt{3}}$. L'equazione $\overline{PQ} = k\,\overline{RS}$ è quindi:

$$2\sqrt{2t - t^2} = k\frac{2t}{\sqrt{3}}, \qquad \sqrt{6t - 3t^2} = kt, \qquad con\ k > 0\ \ e\ \ 0 < t \le \frac{3}{2}.$$

Osserviamo che se $t \to 0^+$ risulta: $k = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{6t - 3t^2}}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sqrt{6t}}{t} = +\infty$.

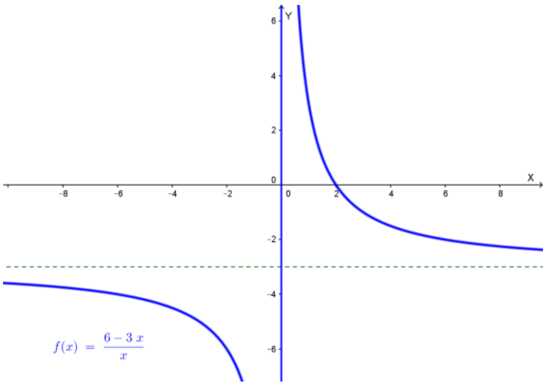
L'equazione in t che risolve la questione proposta è quindi la seguente:

$6t - 3t^2 = k^2t^2, \quad (3 + k^2)t^2 - 6t = 0$.

c)

Posto, nell'equazione trovata, $t = X$ e $k^2 = Y$, esprimere Y in funzione di X e, ***prescindendo dalla questione geometrica****, studiare la funzione $Y = Y(X)$ così ottenuta e disegnarne l'andamento.*

Con $t = X$ e $k^2 = Y$ l'equazione $6t - 3t^2 = k^2t^2$ diventa: $6X - 3X^2 = YX^2$ che si spezza in $X = 0$ $(non\ accettabile)$ e $Y = \frac{6-3X}{X}$. Quest'ultima è una funzione omografica di centro $(0; -3)$, asintoti di equazione: $X = 0 \ e \ Y = -3$ e passante per il punto di coordinate $(2; 0)$. Grafico:



d)

Utilizzando tale andamento, stabilire per quali valori di k si hanno valori di t che risolvono la questione di cui al punto b) e quanti sono questi valori di t.

Ricordiamo che le limitazioni su t e k sono: $0 < t \leq \frac{3}{2} \quad e \quad k > 0$. Essendo t=X, si hanno valori di t che risolvono la questione di cui al punto b) se: $0 < X \leq \frac{3}{2}$.

Se X=t=3/2 abbiamo $Y = k^2 = \frac{6-3X}{X} = \frac{6-\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}} = 1$: $k = 1$.

Se $0 < X = t < \frac{3}{2}$ abbiamo 1 soluzione per $Y > 1$, $quindi\ per \ \ k > 1$.

In generale quindi si hanno valori di t che risolvono la questione per $k \geq 1$ $(1\ soluzione\ per\ k \geq 1)$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria