

**- E U R O P A -**  
ESAME DI STATO: Indirizzo **Scientifico**  
**Sessione ordinaria 2004**  
SECONDA PROVA SCRITTA  
Tema di MATEMATICA

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 4 dei 7 quesiti in cui si articola il questionario:*

*PROBLEMA 1.*

In un piano sono assegnati una retta  $r$  ed un punto  $H$  la cui distanza da  $r$  è  $\frac{3}{2}$  rispetto ad una data unità di misura delle lunghezze.

- a) Dopo aver riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ( $Oxy$ ), determinare sulla retta  $r$  due punti  $A$  e  $B$  tali che il triangolo  $HAB$  sia equilatero e trovare l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo.
- b) Determinare l'equazione in  $t$  che risolve la seguente questione:  
«Condurre, ad una distanza  $t$  dal punto  $H$ , la retta  $s$  parallela ad  $r$  in modo che intersechi la circonferenza e il triangolo suddetti e, indicate con  $PQ$  ed  $RS$  le corde che su tale retta  $s$  intercettano nell'ordine la circonferenza e il triangolo medesimi, risulti:  $\overline{PQ} = k \overline{RS}$ , dove  $k$  è un parametro reale assegnato».
- c) Posto, nell'equazione trovata,  $t = X$  e  $k^2 = Y$ , esprimere  $Y$  in funzione di  $X$  e, prescindendo dalla questione geometrica, studiare la funzione  $Y = Y(X)$  così ottenuta e disegnarne l'andamento.
- d) Utilizzando tale andamento, stabilire per quali valori di  $k$  si hanno valori di  $t$  che risolvono la questione di cui al punto b) e quanti sono questi valori di  $t$ .

*PROBLEMA 2.*

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = a x^2 - \frac{3}{2} a x + \frac{1}{2x},$$

dove  $a$  è un parametro reale assegnato.

- a) Dimostrare che esse passano tutte per uno stesso punto  $A$ .
- b) Tra le curve assegnate determinare quella che presenta come tangente in  $A$  la retta di coefficiente angolare  $\frac{23}{18}$ .
- c) Dopo aver controllato che la curva  $K$  trovata è quella che corrisponde al valore 1 di  $a$ , studiarla e disegnarne l'andamento.
- d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva  $K$  e dalla retta di equazione  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ .

*QUESTIONARIO.*

1. Considerata la funzione  $f(x) = \frac{\sin x}{\sin 2x}$ , calcolare, qualora esistano, i suoi limiti per  $x \rightarrow 0$  e per  $x \rightarrow +\infty$ .

2. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale  $\int_0^{\sqrt[3]{2}} f(x) dx$ . È allora possibile calcolare il valore di:

$$[A] \int_0^{\sqrt[3]{4}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx; \quad [B] \int_0^{\sqrt[3]{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx; \quad [C] \int_0^{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx; \quad [D] \int_0^{2\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

3. Dimostrare la formula che fornisce la somma di  $n$  numeri in progressione geometrica..

4. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un tetraedro regolare, misurata in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.

5. La retta  $r$  è perpendicolare nel vertice  $A$  al piano del quadrato  $ABCD$ . Indicato con  $E$  un qualsiasi punto di  $r$ , distinto da  $A$ , dimostrare che le facce laterali della piramide di vertice  $E$  e base  $ABCD$  sono triangoli rettangoli, a due a due congruenti.

6. Si consideri il seguente sistema di equazioni nelle indeterminate  $x, y$ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{17}{4} \\ x^3 y^3 = 1 \end{cases}$$

Ogni sua soluzione rappresenta le coordinate di un punto del piano cartesiano ( $Oxy$ ). Calcolare quanti e quali punti rappresenta il sistema.

7. Una classe è formata da 30 alunni, fra i quali Aldo e il suo amico fidato Giacomo. Si deve formare una delegazione costituita da 4 studenti della classe. Calcolare quante sono le possibili quaterne comprendenti Aldo e Giacomo.

- 
- Durata della prova: 6 ore.
  - Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.
  - È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.