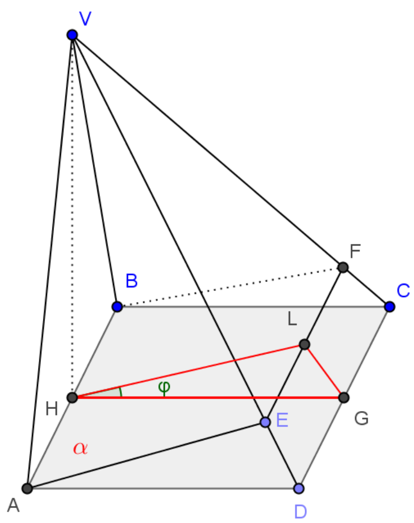
ORDINAMENTO 2004 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

Una piramide ha per base il quadrato ABCD di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza VH della piramide è lunga 7 cm e il suo piede H è il punto medio del lato AB. Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo φ tale che $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ e indicare con EF la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.



a)

Spiegare perché il quadrilatero convesso ABEF è inscrivibile in una circonferenza γ.

ABFE è un trapezio isoscele con basi AB ed EF, ed in quanto tale gli angoli opposti sono supplementari: quindi il trapezio è inscrittibile in una circonferenza.

Dimostriamo che ABFE è un trapezio isoscele.

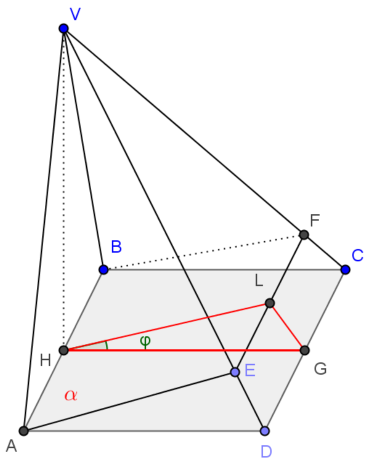
Il piano α incontra la faccia VCD nel segmento EF parallelo ad AB, quindi ABEF è un trapezio. Dimostriamo ora che BF è congruente ad AE.

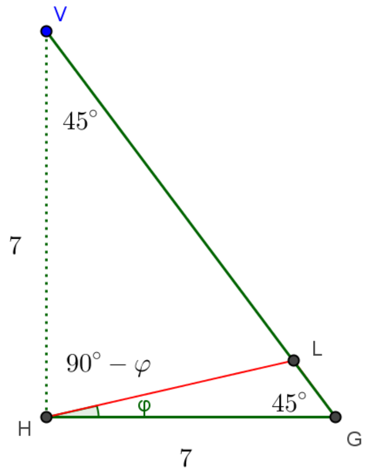
Notiamo che il piano ABV è perpendicolare al piano di base ABCD, quindi AD è perpendicolare ad AV e così pure CB è perpendicolare a VB. I due triangoli AVD e BVC sono quindi rettangoli rispettivamente in A e B. Ma il triangolo ABV è isoscele sulla base

AB (poiché per ipotesi l'altezza VH è anche mediana), quindi AV è congruente a BV. I triangoli rettangoli AVD e BVC sono quindi congruenti per il primo criterio. Ne consegue che VD è congruente a VC e l'angolo AVD è congruente all'angolo BVC. Essendo poi il triangolo VCD isoscele sulla base CD ed EF parallelo a CD, anche il triangolo VEF è isoscele, quindi VE è congruente a VF. Infine, i due triangoli AVE e BVF sono congruenti anch'essi per il primo criterio ($AV \cong BV\, , VE \cong VF\ e\ \ A\hat{V}E \cong B\hat{V}F$) e pertanto, come volevamo dimostrare, AE è congruente a BF.

b)

Tale quadrilatero è anche circoscrivibile ad una circonferenza?





Per stabilire se il trapezio ABFE è circoscrivile ad una circonferenza dobbiamo dimostrare se $AB + EF = AE + BF$.

Il triangolo VHG è rettangolo in H ed è isoscele poiché per ipotesi VH ed HG misurano entrambi 7 cm.

Applichiamo il teorema dei seni al triangolo HLG per trovare LG, dopo aver notato che, essendo $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, risulta $sen\ \varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{4}{5}$; inoltre l'angolo in L misura $180° - 45° - \varphi = 135° - \varphi$, pertanto $sen\ \hat{L} = sen(135° - \varphi) = sen135°\ cos\varphi - sen\varphi cos135° = = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7}{10}\sqrt{2}$. Quindi:

$$\frac{HG}{sen\ \hat{L}} = \frac{LG}{sen\ \varphi} \quad \Longrightarrow \ LG = \frac{HG \cdot sen\ \varphi}{sen\ \hat{L}} = \frac{7 \cdot \frac{4}{5}}{\frac{7}{10}\sqrt{2}} = \frac{28}{5} \cdot \frac{10}{7\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} = LG$$

Essendo $VG = 7\sqrt{2},$ segue che: $VL = VG - LG = 3\sqrt{2} = VL.$

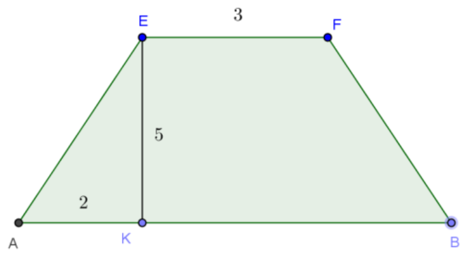
Calcoliamo ora HL applicando ancora il teorema dei seni al triangolo VHL:

$$\frac{HL}{sen\ 45°} = \frac{VL}{sen\ (90° - \varphi)} \quad \Longrightarrow \quad HL = \frac{VL \cdot sen\ 45°}{sen\ (90° - \varphi)} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos \varphi} = \frac{3}{\frac{3}{5}} = 5 = HL$$

Per calcolare EF notiamo che i triangoli VCD e VEF sono simili con rapporto di similitudine uguale al rapporto fra VG e VL:

$$\frac{EF}{CD} = \frac{VL}{VG} = \frac{3\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{3}{7} \quad da\ cui \quad EF = \frac{3}{7}CD = \frac{3}{7} \cdot 7 = 3 = EF.$$

Resta da calcolare la misura di AE. Riproduciamo il trapezio ABFE:



Dopo aver notato che l'altezza EK è uguale ad HL, quindi misura 5 cm, calcoliamo AK:

$$AK = \frac{AB - EF}{2} = \frac{7 - 3}{2} = 2$$

Quindi: $AE = \sqrt{AK^2 + EK^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29} = AE.$

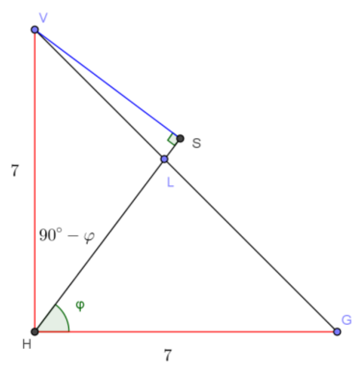
Calcoliamo ora la somma dei lati opposti del trapezio:

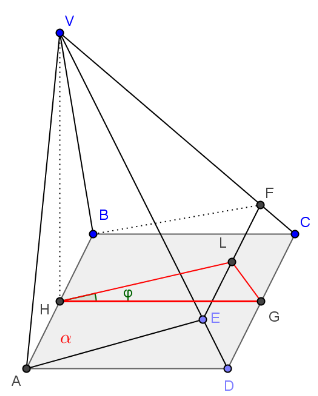
$$AB + EF = 7\ cm + 3\ cm = 10\ cm \quad ; \quad AE + EF = 2AE = 2\sqrt{29}\ cm > 10\ cm$$

Il quadrilatero NON è quindi circoscrivibile ad una circonferenza.

c)

Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α.





Una delle due parti è la piramide di vertice V e base il trapezio ABFE. La base di tale piramide ha area:

$$Area(ABFE) = \frac{(AB + EF) \cdot HL}{2} = \frac{(7+3) \cdot 5}{2}\ cm^2 = 25\ cm^2$$

L'altezza di tale piramide è la distanza di V dal piano di base ABFE, che equivale alla distanza dalla retta HL. Detta VS tale distanza, osservando la prima delle due figure indicate all'inizio si ha:

$$VS = VH \cdot sen\,(90° - \varphi) = 7 \cdot \cos\varphi = 7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{5}\ cm$$

La piramide di vertice V e base ABFE ha quindi volume:

$$V = \frac{1}{3} \cdot\ Area(ABFE) \cdot VS = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot \frac{21}{5}\ cm^3 = 35\ cm^3 = V(VABFE)$$

Il volume del secondo solido si ottiene sottraendo al volume della piramide VABCD quello della piramide VABFE).

$V(piramide\ VABCD) = \frac{1}{3} \cdot\ Area(ABCD) \cdot VH = \frac{1}{3} \cdot 49 \cdot 7\ cm^3 = \frac{343}{3}\ cm^3$

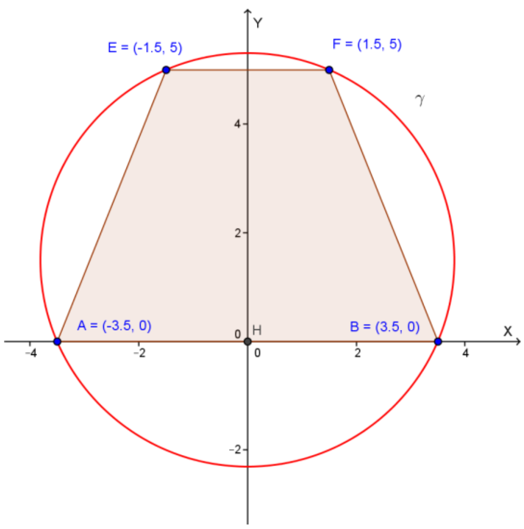
Quindi:

$$V(ABCDEF) = V(VABCD) - V(VABFE) = \left(\frac{343}{3} - 35\right)\ cm^3 = \frac{238}{3}\ cm^3 = V(ABCDEF)$$

d)

Dopo aver riferito il piano α ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), determinare l'equazione della circonferenza γ.

Fissiamo il sistema di riferimento con origine in H, asse delle x coincidente con la retta AB e asse y coincidente con la retta HL e rappresentiamo il trapezio ABFE in tale sistema di riferimento:



La circonferenza è quella passante per i punti A=(-3.5;0), B=(3.5;0) ed F=(1.5;5).

La circonferenza di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ passa per A, B e C se è soddisfatto il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{49}{4}-\frac{7}{2}a+c=0 \\ \frac{49}{4}+\frac{7}{2}a+c=0 \\ \frac{9}{4}+25+\frac{3}{2}a+5b+c=0 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro le prime due equazioni si ottiene a=0 (come del resto era prevedibile, vista la simmetria del trapezio rispetto all'asse y);

dalla prima equazione si ha quindi $c=-\frac{49}{4}$ e dalla terza equazione si ricava $b=-3$.

L'equazione della circonferenza circoscritta al trapezio è quindi:

$$x^2+y^2-3y-\frac{49}{4}=0$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri