ORDINAMENTO 2004 - SESSIONE SUPPLETIVA

QUESITO 1

La funzione $f(x)=\frac{3x-2sinx}{2x-3sinx}$ *è, per* $x\to+\infty$, *una forma indeterminata del tipo* $\frac{\infty}{\infty}$. *Il limite della funzione, per* $x\to+\infty$:

A) Non esiste; B) è 3/2; C) è 2/3 ; D) è un valore diverso da 3/2 e 2/3.

Per $x\to+\infty$ $3x-2sinx\sim 3x$ poiché 3x è un infinito e 2sinx è una funzione limitata; per lo stesso motivo $2x-3sinx\sim 2x$, quindi:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2sinx}{2x-3sinx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

La risposta esatta è quindi la B).

QUESITO 2

Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n}k$ *non supera 10000.*

$$\sum_{k=5}^{n}k=5+6+\cdots+n=\frac{(5+n)(n-5+1)}{2}=\frac{(5+n)(n-4)}{2}=\frac{n^2+n-20}{2}$$

Infatti si tratta della somma dei primi n-4 termini di una progressione aritmetica di ragione 1 con primo termine 5.
Ricordiamo infatti che la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica con primo termine a_1 e ultimo termine a_n è data da $\frac{(a_1+a_n)n}{2}$.

Deve essere $\frac{n^2+n-20}{2}\leq 10000$, $n^2+n-20\leq 20000$, $n^2+n-20020\leq 0$;
le radici dell'equazione associata a tale disequazione sono:

$n=\frac{-\sqrt{80081}-1}{2}\cong -141.99$ ed $n=\frac{\sqrt{80081}-1}{2}\cong 140.99$

La disequazione è quindi verificata per: $\frac{-\sqrt{80081}-1}{2}\leq n\leq\frac{\sqrt{80081}-1}{2}\cong 140.99$

Quindi il massimo valore di n è 140.

Notiamo che se n=140 risulta $\sum_{k=5}^{n}k=9860$ mentre se n=141 risulta $\sum_{k=5}^{n}k=10001$.

QUESITO 3

Sia F(x) una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se F'(a)>0 allora F(x) è crescente in a, mentre se F'(a)<0 allora F(x) è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché F(x) ammetta in a un massimo relativo è che risulti F'(a)=0 ed F"(a)<0.

Supponiamo che F'(a)=0 ed F"(a)<0 e dimostriamo che F(x) ha un massimo relativo in x=a.

In base alla formula di Taylor risulta:

$F(x) = F(a) + (x-a) \cdot F'(a) + \dfrac{(x-a)^2}{2!} F''(a) + R_2$

con R_2 trascurabile rispetto a $\frac{(x-a)^2}{2!} F''(a)$. Quindi, essendo $F'(a) = 0$ si ha che, in un intorno di x=a, $F(x) - F(a) \cong \frac{(x-a)^2}{2!} F''(a) \leq 0$ e ciò vuol dire che in un intorno di x=a risulta $F(x) \leq F(a)$: ciò vuol dire che x=a è un punto di massimo relativo.

La condizione non è necessaria: come controesempio consideriamo la funzione di equazione $F(x) = -x^4$ che ha un massimo relativo in x=0 eppure F''(0)=0 , quindi non è F''(a)<0.

QUESITO 4

Risolvere la seguente disequazione in x: $(\ln x)^2 \geq \ln(x^2)$ *.*

Affinché esista lnx deve essere $x > 0$ quindi $\ln(x^2) = 2ln|x| = 2lnx$. Pertanto la disequazione diventa:

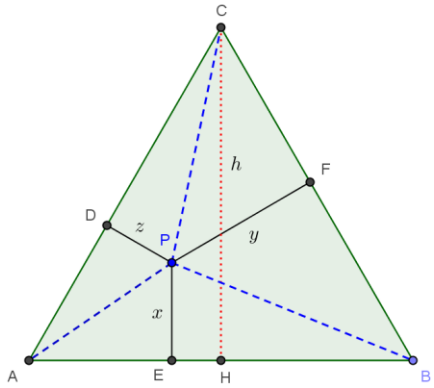
$$(\ln x)^2 \geq 2 \ln \mathrm{x}, \quad (\ln x)^2 - 2 \ln x \geq 0\,, \quad lnx(lnx-2) \geq 0, \quad lnx \leq 0 \quad vel \quad lnx \geq 2$$

Quindi:

$lnx \leq 0$: $\quad 0 < x \leq 1$
$lnx \geq 2$: $\quad x \geq e^2$

QUESITO 5

Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma x+y+z risulta:
[A] sempre maggiore di h;
[B] sempre minore di h;
[C] sempre uguale ad h;
[D] a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.
Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.



Indicato con L il lato del triangolo equilatero ABC, risulta:

$$Area(ABC) = L^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Ma risulta anche:

$$Area(ABC) = Area(APB) + Area(BCP) + Area(ACP) = \frac{L \cdot x}{2} + \frac{L \cdot y}{2} + \frac{L \cdot z}{2} = \frac{L}{2}(x + y + z)$$

Pertanto:

$$\frac{L}{2}(x + y + z) = L^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Longrightarrow \quad x + y + z = L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = h$$

La risposta corretta è quindi la *[C]* .

QUESITO 6

Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

Si tratta di una conica (in particolare di un'iperbole) che possiamo scrivere nella forma:

$$y = \frac{-px - r}{x + q}$$

Questa conica (funzione omografica) è degenere se:
$-p(q) - (-r)(1) = 0\,, \quad -pq + r = 0\,, \quad r = pq$

In tal caso la conica assume la forma:

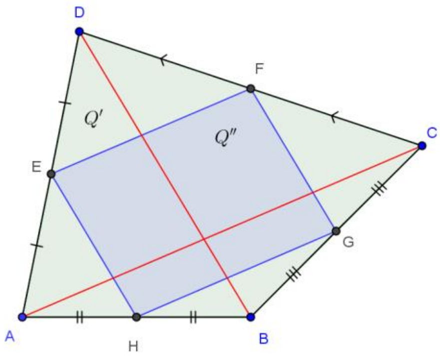
$xy + px + qy + pq = 0\,, \quad x(y+p) + q(y+p) = 0\,, \quad (y+p)(x+q) = 0$

Quindi, se $r = pq$, la conica si spezza nelle rette di equazioni:

$y + p = 0 \;\; e \;\; x + q = 0$ (con p e q non contemporaneamente nulli)

QUESITO 7

Il quadrilatero Q" avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso Q' è un quadrato. Dire quali sono le caratteristiche del quadrilatero Q' e darne esauriente dimostrazione.



Considerando il triangolo ADC, poiché EF congiunge i punti medi dei due lati AD e CD, risulta parallelo al lato AC ed uguale alla sua metà.

In modo analogo, considerando il triangolo BCD, il segmento FG risulta parallelo a BD ed uguale alla sua metà.

Essendo EF ed FG uguali, tali risulteranno anche AC e BD; essendo poi EF ed FG perpendicolari, tali risulteranno anche BD ed AC; quindi:

se Q'' è un quadrato, allora Q' ha le diagonali uguali e perpendicolari.

QUESITO 8

Sia f(x) una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x)dx$ *. È allora possibile calcolare:*

[A] $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)dx;$ *[B]* $\int_0^3 f(3x)dx;$ *[C]* $\int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right)dx;$ *[D]* $\int_0^1 f(3x)dx$.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

Consideriamo il primo integrale: $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$. Con la sostituzione $t = \frac{x}{3}$ si ottiene:

$dx = 3dt$, $se\ x = 0\ \ si\ ha\ t = 0\ e\ se\ \ x = 3\ \ si\ ha\ t = 1$, quindi:

$\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx = \int_0^1 f(t)3dt = 3\int_0^1 f(t)dt$: non calcolabile.

Analizzando gli estremi del nuovo integrale e quelli dell'integrale noto siamo spinti a considerare il quarto.

Analizziamo quindi l'integrale $\int_0^1 f(3x)dx$. Con la sostituzione $t = 3x$ si ottiene:

$dx = \frac{1}{3}dt$, $se\ x = 0\ \ si\ ha\ t = 0\ e\ se\ \ x = 1\ \ si\ ha\ t = 3$, quindi:

$\int_0^1 f(3x)dx = \int_0^3 f(t)\ \frac{1}{3}\ dt = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)dt = \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)dx$: calcolabile.

Quindi, noto l'integrale $\int_0^3 f(x)dx$ è possibile calcolare l'integrale $\int_0^1 f(3x)dx$.

La risposta corretta è quindi la [D].

QUESITO 9

Determinare il dominio della funzione $f(x) = ln\left(2x - \sqrt{4x-1}\right)$.

Il dominio della funzione si ottiene risolvendo la disequazione: $2x - \sqrt{4x-1} > 0$.

$$2x - \sqrt{4x-1} > 0 \quad \Longrightarrow \sqrt{4x-1} < 2x \quad \Longrightarrow \begin{cases} 4x-1 \geq 0 \\ 2x > 0 \\ 4x-1 < 4x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{4} \\ x > 0 \\ 4x^2 - 4x + 1 > 0 \end{cases}$$

Risolviamo la disequazione $4x^2 - 4x + 1 > 0$; $\quad (2x-1)^2 > 0 \quad ; \quad x \neq \frac{1}{2}$
Quindi:

$$\begin{cases} x \geq \dfrac{1}{4} \\ x > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x \geq \frac{1}{4} \quad con \quad x \neq \frac{1}{2}$$

Il dominio della funzione è pertanto il seguente:

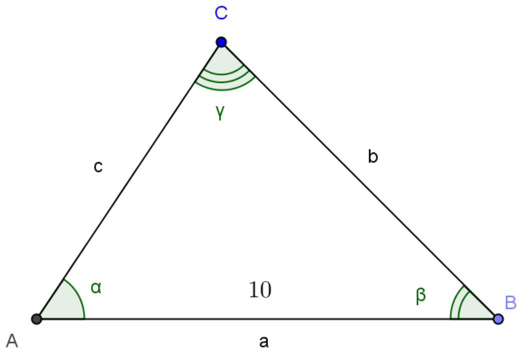
$$D = \left\{x \in \mathbb{R}:\ \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}\ , \qquad \frac{1}{2} < x < +\infty\right\}$$

QUESITO 10

Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso, α e β, sono tali che $sen\alpha = 3/5$ *e* $sen\beta = 24/25$*, ne esistono:*

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.



$sen\alpha = \frac{3}{5}$, $sen\beta = \frac{24}{25}$, $\gamma = 180° - \alpha - \beta$.

Se $sen\alpha = \frac{3}{5}$ risulta $\alpha = arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ da cui $\alpha \cong 37°$ $oppure$ $\alpha \cong 180° - 37° = 143°$

Se $sen\beta = \frac{24}{25}$ risulta $\beta = arcsen\left(\frac{24}{25}\right)$ da cui $\beta \cong 74°$ $oppure$ $\beta \cong 180° - 74° = 106°$

Siccome deve essere $\alpha + \beta < 180°$, visti i valori di β può essere solo $\alpha \cong 37°$.

Ne segue che esistono due possibili triangoli non congruenti, con angoli rispettivamente:

$\alpha \cong 37°$, $\beta \cong 74°$, $\gamma \cong 180° - 37° - 74° = 69°$

$\alpha \cong 37°$, $\beta \cong 106°$, $\gamma \cong 180° - 37° - 106° = 37°$

Quindi la risposta esatta è la C).

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri