PNI 2004 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

$$y = \frac{2x(6-x)}{2+x} \qquad [1]$$

a)

Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.

Notiamo preliminarmente che, poiché la funzione si può scrivere nella forma
$y(2+x) - 2x(6-x) = 0 \quad , \quad 2x^2 + xy - 12x + 2y = 0$
è una conica, ed in particolare un'iperbole.

Ma procediamo allo studio della funzione.

Dominio: $-\infty < x < -2 \;\; , \;\; -2 < x < +\infty$

Simmetrie notevoli:

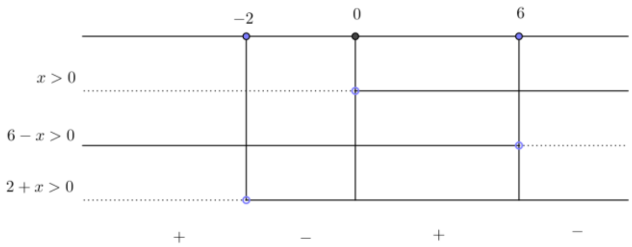
Essendo $f(-x) = \frac{-2x(6+x)}{2-x}$ diversa sia da $f(x)$ che da $-f(x)$ la funzione non né pari né dispari.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

Se $x = 0$, $y = 0$.
Se $y = 0$, $2x(6-x) = 0$, $da\ cui\ x = 0 \;\; e\ x = 6$

Segno della funzione:

$$y > 0 \quad se \quad \frac{2x(6-x)}{2+x} > 0 \quad \Rightarrow \quad x < -2\,, \;\; 0 < x < 6$$



Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x(6-x)}{2+x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(-2x)=\mp\infty$$

C'è asintoto verticale perché il grado del numeratore supera di 1 il grado del denominatore.

$$\lim_{x\to(-2)^\pm}\frac{2x(6-x)}{2+x}=\mp\infty\ :\quad x=-2\ asintoto\ verticale$$

Cerchiamo l'asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{x^2}=-2=m\ ;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x(6-x)}{2+x}+2x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{16x}{2+x}\right)=16=q$$

Asintoto obliquo: $y=-2x+16$

Derivata prima:

$$f'(x)=\frac{24-8x-2x^2}{(\mathrm{x}+2)^2}\geq 0\quad se\quad 24-8x-2x^2\geq 0\,,\quad x^2+4x-12\leq 0:\ -6\leq x\leq 2$$

Pertanto la funzione è crescente se $-6<x<-2\,,\ -2<x<2$ e decrescente se

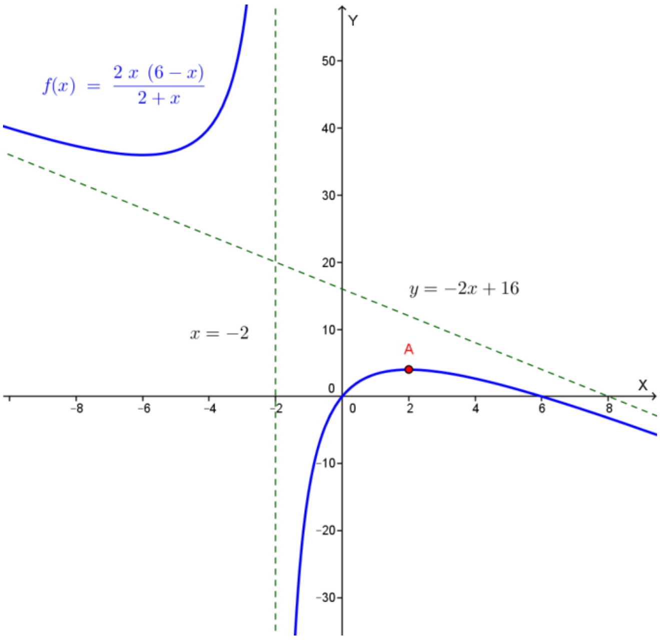
$x<-6\ \ oppure\ \ x>2$

$x=-6$ punto di minimo relativo, $f(-6)=36$
$x=2$ punto di massimo relativo, $f(2)=4$

Derivata seconda:

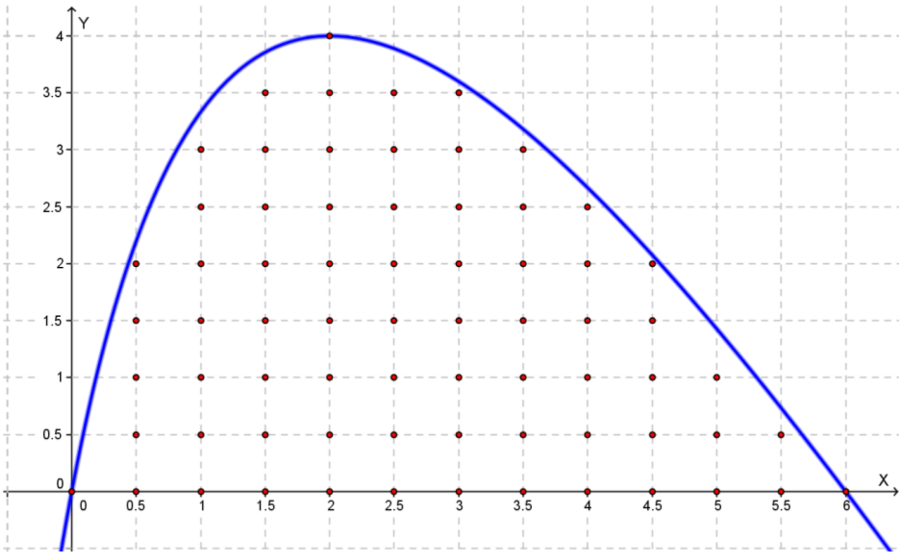
$f''(x)=-\frac{64(x+2)}{(x+2)^4}\geq 0\quad se\quad x<-2$ (concavità verso l'alto; non ci sono flessi)

Il grafico della funzione è il seguente:



b)

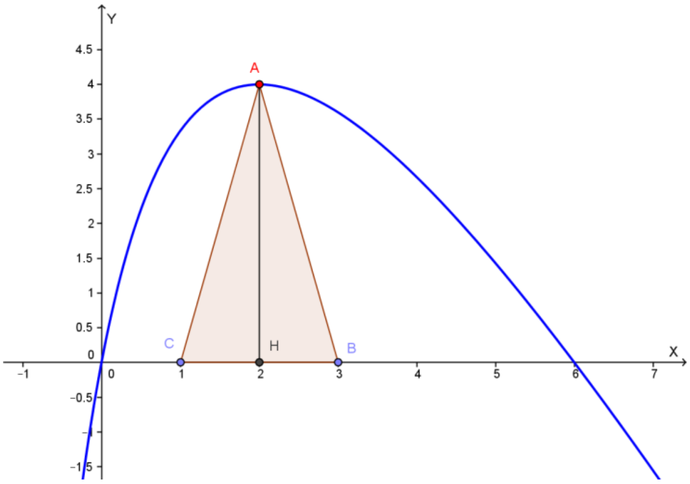
Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.



I punti richiesti sono: 13 di ordinata 0/2, 11 di ordinata ½, 10 di ordinata 2/2, 9 di ordinata 3/2, 9 di ordinata 4/2, 7 di ordinata 5/2, 6 di ordinata 6/2, 4 di ordinata 7/2 e 1 di ordinata 8/2. In totale abbiamo quindi 13+11+10+9+9+7+6+4+1=70 punti.

c)

Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.



Indicata con x l'ascissa di C (con x<2), l'ascissa di B sarà 4-x. Quindi le coordinate dei vertici del triangolo sono:

$A = (2; 4),\ \ B = (4 - x, 0), \qquad C = (x, 0)$

Risulta: $AC = AB = \sqrt{(x-2)^2 + 16} = \sqrt{x^2 - 4x + 20}$, quindi:

$2p(ABC) = 2AC + BC = 2\sqrt{x^2 - 4x + 20} + (4 - 2x) = 16$ da cui:

$\sqrt{x^2 - 4x + 20} = 6 + x$; deve essere $6 + x \geq 0, x \geq -6$. Elevando al quadrato entrambi i membri risulta:

$x^2 - 4x + 20 = (6 + x)^2 \ \ da\ cui: \quad 16x = -16\, ,\ quindi \quad x = -1$ (accettabile).

I vertici B e C del triangolo richiesto sono quindi: $B = (5,0),\ C = (-1,0)$

d)

Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.

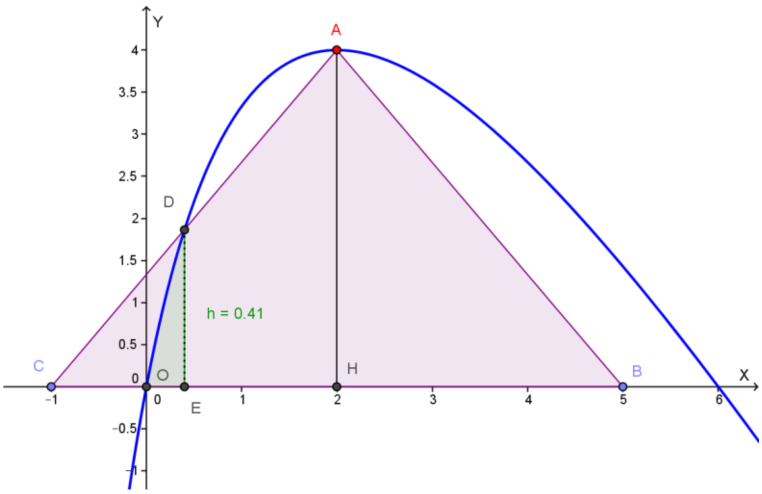
Con $A = (2; 4)\ \ e\ \ C = (-1; 0)$ la retta AC ha equazione:

$$\frac{y-4}{0-4} = \frac{x-2}{-1-2} \quad \Longrightarrow \quad -3y + 12 = -4x + 8 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$$

Determiniamo l'intersezione D tra la retta AC e la curva K:

$$\begin{cases} y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{2x(6-x)}{2+x} \end{cases} \implies \frac{2x(6-x)}{2+x} = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \implies 6x(6-x) = (4x+4)(2+x)$$

Che ha come soluzioni $x = 2 \ e \ x = \frac{2}{5}$ quindi: $D = \left(\frac{2}{5}; \frac{28}{15}\right)$.



Calcoliamo l'area del triangolo mistilineo ODE:

$$A(ODE) = \int_0^{\frac{2}{5}} \frac{2x(6-x)}{2+x} dx = \int_0^{\frac{2}{5}} \frac{-2x^2+12x}{2+x} dx = \int_0^{\frac{2}{5}} \frac{-2x^2+12x}{2+x} dx$$

Eseguendo la divisione tra $-2x^2 + 12x$ e $2 + x$ otteniamo:

$$-2x^2 + 12x = (-2x+16)(2+x) - 32$$

Quindi:

$$\int_0^{\frac{2}{5}} \frac{-2x^2+12x}{2+x} dx = \int_0^{\frac{2}{5}} \frac{(-2x+16)(2+x)-32}{2+x} dx = \int_0^{\frac{2}{5}} \left(-2x+16-\frac{32}{2+x}\right) dx =$$

$$= \left[-x^2 + 16x - 32\ln(2+x)\right]_0^{\frac{2}{5}} = -\frac{4}{25} + \frac{32}{5} - 32\ln\left(\frac{12}{5}\right) + 32ln2 \cong 0.41\ u^2$$

Calcoliamo l'area del triangolo CDE:

$$A(CDE) = \frac{CE \cdot DE}{2} = \frac{\frac{7}{5} \cdot \frac{28}{15}}{2} = \frac{98}{75} \cong 1.31\ u^2$$

Quindi la parte CDO del triangolo ha area: $(1.31 - 0.41)\ u^2 = 0.90\ u^2$

L'area del triangolo ABC è pari a: $\frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12\ u^2$

La seconda parte del triangolo ha area: $(12\ - 0.90)\ u^2 = 11.10\ u^2$

e)

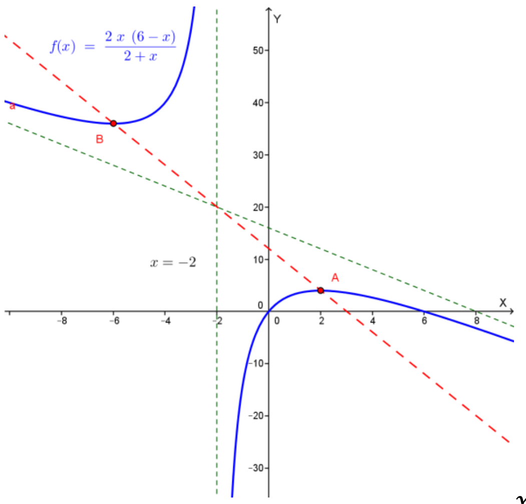
Spiegare perché la funzione [1] non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

La funzione non è invertibile nel suo dominio poiché non è iniettiva; infatti, come si evince dal grafico, non è vero che ad x distinti corrispondono y distinti. La funzione non è quindi biunivoca e pertanto non è invertibile.

Se restringe il dominio all'intervallo $[-6; 2]$, $con\ x \neq -2$ la funzione è invertibile; analogamente è invertibile se si restringe il dominio agli intervalli: $(-\infty; -6]$, $[2; +\infty)$.

Cerchiamo nei due casi l'equazione della funzione inversa. La funzione, come visto nel punto a), si può scrivere nella forma: $2x^2 + xy - 12x + 2y = 0$. Dobbiamo ricavare la x in funzione della y; ordiniamo l'equazione in x: $2x^2 + x(y-12) + 2y = 0$ e risolviamola rispetto ad x. Risulta: $\Delta = (y-12)^2 - 16y = y^2 - 40y + 144 \geq 0 \quad se \quad y \leq 4 \ \ or \ \ y \geq 36$, che rappresenta il codominio della funzione.
Abbiamo quindi:

$$x = \frac{12 - y \pm \sqrt{y^2 - 40y + 144}}{4} = 3 - \frac{1}{4}y \pm \sqrt{y^2 - 40y + 144}$$



Rappresentiamo la retta di equazione $x = 3 - \frac{1}{4}y$ insieme alla funzione. Quando $x \geq 3 - \frac{1}{4}y$, cioè a destra della suddetta retta, la funzione inversa ha equazione:

$x = 3 - \frac{1}{4}y + \sqrt{y^2 - 40y + 144}$;
questa equazione vale se $[-6; -2) \cup [2; +\infty)$.

Se invece $x \leq 3 - \frac{1}{4}y$, quindi in $(-\infty; -6] \cup (-2; 2]$
La funzione inversa ha equazione:

$$x = 3 - \frac{1}{4}y - \sqrt{y^2 - 40y + 144}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri