

ORDINAMENTO 2004 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto a una assegnata unità di lunghezza, il segmento VF sia lungo $1/2$. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a)

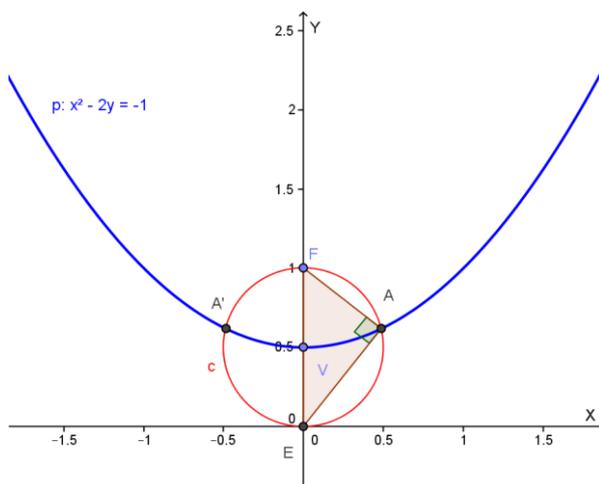
determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A .

Indicato con E l'origine degli assi cartesiani e con FV l'asse delle y orientato da V verso F (vedi figura), la parabola ha vertice $V = \left(0; \frac{1}{2}\right)$ e fuoco $F = (0; 1)$. La sua equazione è quindi del tipo:

$$y = ax^2 + \frac{1}{2}$$

Imponiamo che l'ordinata del fuoco valga 1: $\frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1+2a}{4a} = 1$, da cui: $a = \frac{1}{2}$

La parabola ha quindi equazione $p: y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ ed il suo grafico è il seguente:



Gli eventuali punti A della parabola tali che il triangolo AVF sia retto in A sono gli eventuali punti di intersezione della circonferenza di diametro EF con la parabola stessa. **Di tali punti, come si vede graficamente, ce ne sono due** (simmetrici rispetto all'asse delle y).

b)

Chiamato P un generico punto della parabola p , trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p .

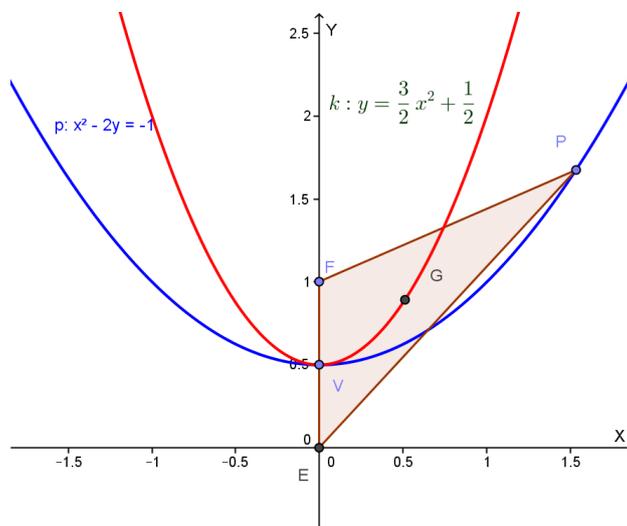
Il punto generico P della parabola p ha coordinate del tipo $P = (t; \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2})$, dove t è un parametro reale. Le coordinate del baricentro G del triangolo PEF sono:

$x_G = \frac{x_P + x_E + x_F}{3}$, $y_G = \frac{y_P + y_E + y_F}{3}$, quindi il luogo k ha equazioni parametriche:

$$k: \begin{cases} x = \frac{1}{3}(t + 0 + 0) = \frac{1}{3}t \\ y = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} + 0 + 1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

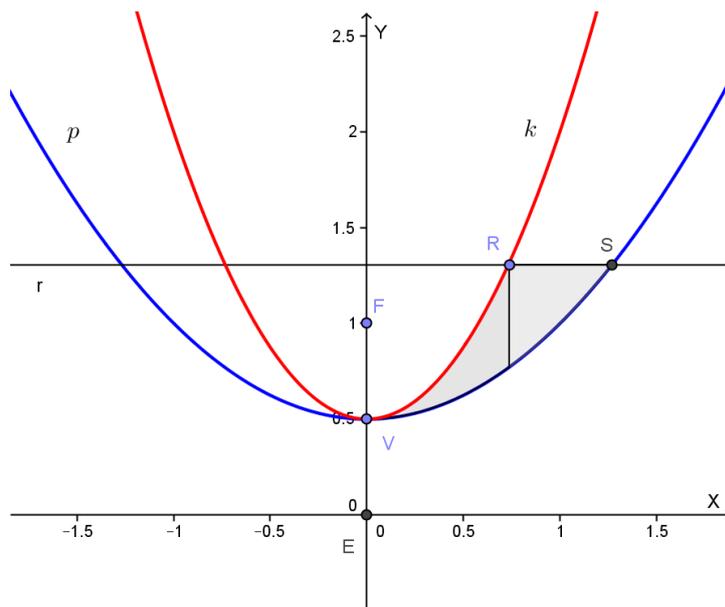
Per trovare l'equazione cartesiana del luogo k eliminiamo il parametro t fra le due equazioni:

$$t = 3x, \quad y = \frac{1}{6}(9x^2) + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$



c)

Indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p e il secondo al luogo k e situati nel 1° quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p , calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento RS , dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a $\frac{8}{9}(3 - \sqrt{3})$.



In dicata con h la distanza della retta r da O , la sua equazione è $y=h$ (con $h>1/2$). E' utile esprimere le parabole (per $x>0$) nelle seguenti forme:

$$p: y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{2y - 1}$$

$$k: y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}}$$

Utilizzando queste equazioni l'area richiesta si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{\frac{1}{2}}^h \left(\sqrt{2y - 1} - \sqrt{\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}} \right) dy = \int_{\frac{1}{2}}^h (\sqrt{2y - 1}) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) dy = \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{1}{2}}^h 2(\sqrt{2y - 1}) dy = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} \cdot \left[\frac{(2y - 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{\frac{1}{2}}^h = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot (2h - 1)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(2h - 1)^3} = \frac{8}{9} (3 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Da cui:

$$\sqrt{(2h - 1)^3} = \frac{8}{9} \cdot \frac{3\sqrt{3} \cdot (3 - \sqrt{3})}{(\sqrt{3} - 1)} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3} - 3}{(\sqrt{3} - 1)} = 8$$

Elevando al quadrato:

$$(2h - 1)^3 = 64 \Rightarrow 2h - 1 = 4 \Rightarrow h = \frac{5}{2}$$

La distanza di r da V è quindi $h - 1/2$, cioè:

$$\text{distanza}(r, V) = h - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

d)

Stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

La distanza trovata sopra, pari a 2, è chiaramente un numero razionale.

Con la collaborazione di Angela Santamaria