ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2003/2004
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di MATEMATICA

Seconda prova scritta
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto ad una assegnata unità di lunghezza, il segmento VF sia lungo $\frac{1}{2}$. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a) Determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A.

b) Chiamato P un generico punto della parabola p, trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p.

c) Indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p ed il secondo al luogo k e situati nel 1° quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p, calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento RS, dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a $\frac{8}{9}\left(3-\sqrt{3}\right)$.

d) Stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

PROBLEMA 2.

In un piano, riferito ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{1 + a \operatorname{sen} x}{\cos x},$$

dove a è un parametro reale.

a) Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo 2π, che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.

b) Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \le x \le \pi$, dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

QUESTIONARIO.

1. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al secondo.

2. Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare ad uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.
Si può concludere che ogni retta parallela ad uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

3. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln\left(1 - 2x + \sqrt{x}\right)$.

4. Il limite di tang x per x tendente a $+\infty$:

A) è $+\infty$;

B) è $\frac{\pi}{2}$;

C) non esiste;

D) esiste ma non si riesce a calcolare.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

5. Dimostrare il seguente teorema: «Condizione sufficiente ma non necessaria affinché la funzione reale di variabile reale f(x) sia continua nel punto *a* è che sia derivabile in *a*».

6. Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare la formula che fornisce il volume di una sfera di raggio assegnato.

7. Indicata con S_n la somma di n termini in progressione geometrica, di primo termine $\frac{1}{2}$ e ragione $\frac{1}{2}$, calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$.

8. Calcolare il valore della seguente somma:
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2$.

9. In una classe di 25 alunni bisogna estrarre a sorte una rappresentanza di 3 elementi. Calcolare quante sono le possibili terne di rappresentanti.

10. Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Calcolare il numero dei possibili ordini di arrivo che registrino i nostri due amici fra i primi tre classificati.

____

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'Istituto prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.