**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**
**a.s. 2003/2004**
**CORSO SPERIMENTALE P.N.I.**
**Tema di MATEMATICA**

Seconda prova scritta
Sessione straordinaria

***Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.***

***PROBLEMA 1.***

In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto ad una assegnata unità di lunghezza, il segmento VF sia lungo $\frac{1}{2}$. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a) Determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A.

b) Chiamato P un generico punto della parabola p, trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p.

c) Indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p ed il secondo al luogo k e situati nel 1° quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p, calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento RS, dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a $\frac{8}{9}\left(3-\sqrt{3}\right)$.

d) Stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

***PROBLEMA 2.***

Si considerino le successioni di termini generali $a_n$, $b_n$ e $c_n$ tali che:

$$a_n = \sum_{i,k=1}^{n} ik, \qquad b_n = \sum_{j=1}^{n} j^2, \qquad c_n = \sum_{\substack{i,k=1 \\ (k \geq i)}}^{n} ik.$$

a) Dimostrare che risulta:

$$a_n = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2, \qquad b_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \qquad c_n = \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1).$$

b) Calcolare il più grande valore di n per cui $a_n$ non supera 100000.

c) Definire per ricorsione la successione di termine generale $c_n$.

d) Utilizzare la precedente definizione per scrivere un algoritmo che fornisca i primi 20 numeri di quella successione e li comunichi sotto forma di matrice di 5 righe e 4 colonne.

***QUESTIONARIO.***

1. Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali ed approssimata al secondo.

2. Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare ad uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.
Si può concludere che ogni retta parallela ad uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

3. Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln\left(1-2x+\sqrt{x}\right)$.

4. Il limite di tang x per x tendente a $+\infty$:
A) è $+\infty$;
B) è $\frac{\pi}{2}$;
C) non esiste;
D) esiste ma non si riesce a calcolare.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

5. Si consideri la seguente implicazione: «Se la funzione reale di variabile reale f(x) è derivabile nel punto *a* allora è continua in *a*». Come noto, essa enuncia un importante teorema di analisi matematica. Enunciare le implicazioni inversa, contronominale e contraria dell'implicazione considerata e dire di ciascuna di esse se si tratta di un teorema. Quando non lo è fornire un esempio che chiarisca la situazione.

6. Determinare il più grande valore del parametro reale m per cui il valore del seguente integrale:

$$\int_0^m \frac{2x-3m}{x-2m}\,dx$$

non supera 24.

7. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato un triangolo qualsiasi. Dimostrare le formule che esprimono le coordinate del baricentro del triangolo in funzione delle coordinate dei suoi vertici.

8. Si consideri l'esperimento consistente nel lancio di due dadi con le facce numerate da "1" a "6", aventi tutte le stesse possibilità di uscire. Si ottiene un successo se, nell'esperimento, esce almeno un "5".
Determinare il minimo numero di volte in cui bisogna effettuare l'esperimento per garantirsi una probabilità pari almeno al 99% di ottenere almeno un successo.

9. Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Sapendo che sul podio finiscono i primi 3 classificati e ammesso che tutti gli atleti abbiano le stesse possibilità, calcolare le probabilità che:
a) sul podio finiscano sia Antonio che Pietro;
b) almeno uno dei due finisca sul podio;
c) nessuno dei due finisca sul podio.

10. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni:

$$\begin{cases} X = mx + 2y - m \\ Y = -x - y + m \end{cases},$$

dove m è un parametro reale. Trovare il luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità al variare di m.

---

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'Istituto prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.