Scuole italiane all'estero (Americhe) 2005 – PROBLEMA 2

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione: $y = x^4 + ax^2 + b$ *, dove a e b sono parametri reali.*

a)

Determinare a quali condizioni devono soddisfare tali parametri affinché la corrispondente curva sia situata nel semipiano $y \geq 0$*.*

Deve essere, per ogni x: $x^4 + ax^2 + b \geq 0$; $\Delta = a^2 - 4b \leq 0$

b)

Esistono valori di a e b tali che la curva corrispondente sia situata nel semipiano $y < 0$*?*

In tal caso dovrebbe essere, per ogni x: $x^4 + ax^2 + b < 0$; posto $x^2 = t$ dovrebbe essere

$t^2 + at + b < 0$ per ogni t. Ma, essendo il coefficiente di t^2 sempre positivo, il trinomio non potrà mai essere negativo per ogni t (… si pensi ad una parabola con la concavità verso l'alto: essa non potrà mai essere tutta sotto l'asse delle ascisse).
Quindi:

la curva di equazione $y = x^4 + ax^2 + b$ non può mai essere situata nel semipiano $y < 0$.

c)

Tra le curve assegnate indicare con K quella che ha un minimo relativo uguale a 0 *ed un massimo relativo uguale ad* 1*.*

La funzione di equazione $y = f(x) = x^4 + ax^2 + b$, razionale intera, è sempre continua e derivabile quanto si vuole. Nel minimo relativo si deve annullare la derivata prima ed essere positiva la derivata seconda:

$f'(x) = 4x^3 + 2ax = 0 \ \ se \ \ x = 0 \ \ \ e \ \ 2x^2 + a = 0, da\ cui \ \ \ x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$ con a<0.
$f''(x) = 12x^2 + 2a;\ \ f''(0) = 2a < 0: x = 0\ punto\ di\ massimo\ relativo$; dovendo essere tale massimo uguale ad 1, si ha: $f(0) = b = 1$.

$f''\left(\pm\sqrt{-\frac{a}{2}}\right) = -6a + 2a = -4a > 0,$ quindi $x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$ sono punti di minimo relativo; dovendo essere tale minimo uguale a 0 abbiamo:

$f\left(\pm\sqrt{-\frac{a}{2}}\right) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 0,\ \ a^2 = 4b,\ ma\ b = 1\ quindi\ a = \pm 2$. Ma è a<0 quindi:
$a = -2,$

d)

Controllato che la curva K si ottiene per $a = -2$ e $b = 1$, disegnarla.

Per tali valori di a e b la curva K che si ottiene ha equazione:

$y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2.$

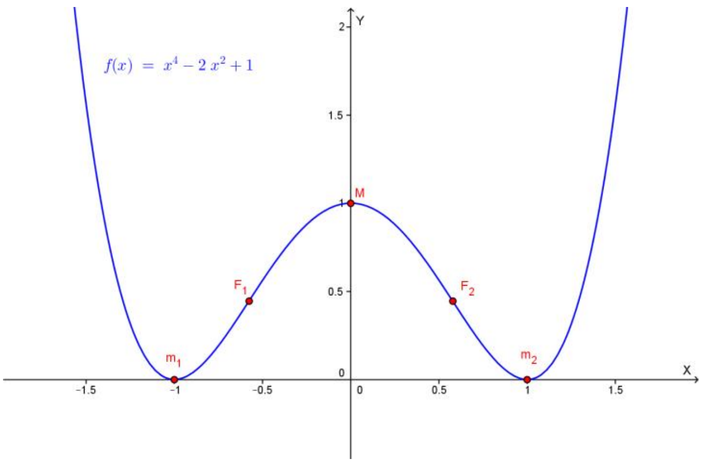
Tale equazione conferma che il grafico di K è tutto nel semipiano $y \geq 0$ ed è tangente all'asse x in x=1 ed x=-1 (che sono i punti di minimo relativo, ed anche assoluto).
In base a quanto detto nel punto precedente la curva ha un massimo relativo che vale 1 per x=0.

Osservato che la curva è pari e che i limiti al più e meno infinito sono uguali a più infinito, non resta che trovare i flessi.

$f''(x) = 12x^2 + 2a = 12x^2 - 4 \geq 0\ \ se\ 3x^2 \geq 1:\ \ x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ \ x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Quindi la curva presenta due flessi per $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ con ordinata $f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{9}$.

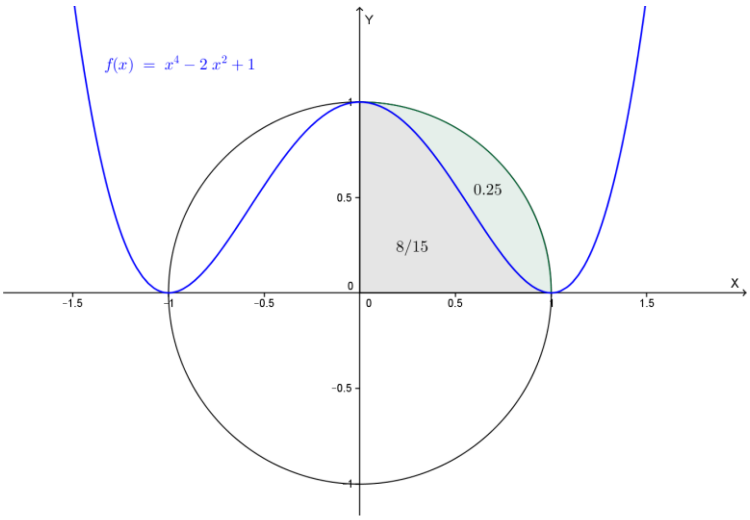
Il grafico della funzione è il seguente:



e)

Calcolare infine le aree delle regioni in cui la curva K divide il cerchio di centro O e raggio 1.

La circonferenza indicata ha equazione: $x^2 + y^2 = 1$.



Le due regioni (una nel primo quadrante e l'altra nel secondo) sono simmetriche rispetto all'asse y, quindi hanno la stessa area. Calcoliamo quella del primo quadrante: essa si ottiene sottraendo ad un quarto del cerchio dato l'area della regione S del primo quadrante compresa fra il grafico di K e gli assi cartesiani.

$$A(S) = \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15}\ u^2$$

Ognuna delle due regioni ha quindi area uguale a:

$$\frac{1}{4}\pi \cdot 1^2 - \frac{8}{15} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{8}{15}\right)\ u^2 \cong 0.25\, u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria