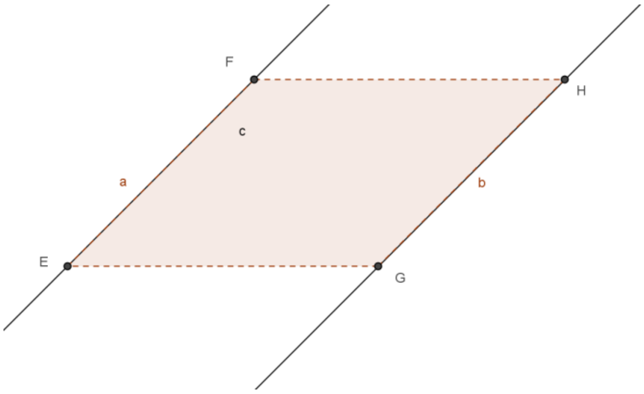
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2005 – Quesiti

QUESITO 1

Nello spazio si considerino tre rette a, b, c, comunque scelte ma alle seguenti condizioni: la retta a è strettamente parallela alla retta b e la retta b è strettamente parallela alla retta c. Si può concludere che le rette a, c non hanno punti in comune? Fornire una esauriente motivazione della risposta.

Le rette a e c sono parallele, ma non è detto che lo siano strettamente: possono coincidere, come si vede facilmente nella figura seguente.



QUESITO 2

Un piano γ interseca i due piani α e β, paralleli in senso stretto, rispettivamente secondo le rette a e b. Si può concludere qualcosa circa le posizioni reciproche di queste due rette? Fornire esaurienti spiegazioni della risposta.

Le due rette a e b sono parallele in senso stretto. Infatti sono complanari, poiché appartengono allo stesso piano γ e non hanno punti in comune perché giacciono su piani che non hanno punti in comune (essendo paralleli in senso stretto).

QUESITO 3

Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione 2^x è $2^x ln2$, esplicitando ciò che si ammette.

Si può calcolare la derivata richiesta in base alla definizione di derivata oppure, sapendo che la derivata di $e^{f(x)}$ è $f'(x)e^{f(x)}$ nel seguente modo:

$$2^x = e^{ln2^x} = 2^{xln2}, \quad quindi: \quad D(2^x) = D(2^{xln2}) = D(xln2)2^{xln2} = (ln2)2^x$$

QUESITO 4

Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^7$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente: a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7. Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

La formula generale dello sviluppo della potenza di un binomio è la seguente:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Quindi i coefficienti, nell'ordine richiesto, sono:

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

Con n=7 abbiamo:

$$\binom{7}{0} = 1, \binom{7}{1} = 7, \binom{7}{2} = 21, \binom{7}{3} = 35, \binom{7}{4} = 35, \binom{7}{5} = 21, \binom{7}{6} = 7, \binom{7}{7} = 1$$

QUESITO 5

In una fabbrica lavorano 35 operai e 25 operaie. Si deve formare una delegazione comprendente 3 operai e 2 operaie. Quante sono le possibili delegazioni?

I 3 operari possono essere scelti in un numero di modi pari alle combinazioni di 35 oggetti a 3 a 3: $C_{35,3} = \binom{35}{3} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33}{6} = 6545$.
Le 2 operaie possono essere scelte in un numero di modi pari alle combinazioni di 25 oggetti a 2 a 2: $C_{25,2} = \binom{25}{2} = \frac{25 \cdot 24}{2} = 300$.

Le possibili delegazioni sono quindi $6545 \cdot 300 = 1963500$.

QUESITO 6

Calcolare il limite della funzione $\frac{2x - sen\,3x}{3x + \cos 2x}$ per x tendente a più infinito. E' vero o falso che si può ricorrere al teorema di De L'Hôpital? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x - sen\,3x}{3x + \cos 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(2 - \frac{sen\,3x}{x}\right)}{x\left(3 + \frac{\cos 2x}{x}\right)} = \frac{2}{3}$$

N.B. Per $x \to +\infty$ sen(3x)/x e cos(2x)/x tendono a zero (per il teorema del confronto).

Il limite NON PUO' essere calcolato mediante il teorema di De L'Hôpital poiché non esiste il limite del rapporto delle derivate del numeratore e del denominatore, essendo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{D(2x - sen\ 3x)}{D(3x + \cos 2x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - 3\cos 3x}{3 - 2sen2x}$$

Tale limite non esiste perché sia il numeratore sia il denominatore oscillano (il numeratore fra -1 e 5, il denominatore fra 1 e 5).

QUESITO 7

Calcolare, se esiste, la funzione f(x) tale che $\int_0^t f(x)dx = t^2 + \sqrt{t}$.

Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, posto $F(t) = \int_0^t f(x)dx$ risulta:

$$F'(t) = f(t)$$

Abbiamo quindi:

$$f(t) = F'(t) = D\left(\int_0^t f(x)dx\right) = D\left(t^2 + \sqrt{t}\right) = 2t + \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

La funzione f(x) è quindi: $f(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria