Scuole italiane all'estero (Americhe) 2005 – Suppletiva

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, sono assegnate le curve di equazione

$$(1) \qquad y=\frac{1}{3}x^3+kx-3,$$

dove k è un parametro reale.

a)

Dimostrare che tutte le curve (1) passano per uno stesso punto A che per ciascuna di esse è punto di flesso e centro di simmetria.

Si tratta di un fascio di cubiche che hanno una generatrice di equazione x=0. Per x=0 otteniamo y=-3. Il punto A=(0; -3) appartiene a tutte le curve.
Dimostriamo che A è il punto di flesso per tutte le curve.
Ricordiamo che tutte le cubiche hanno uno ed un solo flesso, che è centro di simmetria.
Il flesso, i questo caso, si ottiene annullando la derivata seconda:
$y'=x^2+k,\quad y"=2x=0\ \ se\ x=0$: A è quindi flesso per tutte le curve.
Verifichiamo direttamente che A è centro di simmetria per ogni k.
Le equazioni della simmetria di centro (a; b) sono:

$\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}$; se (a; b)=(0; -3) abbiamo: $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-6-y \end{cases}$ da cui: $\begin{cases} x=-x' \\ y=-6-y' \end{cases}$

La curva di equazione $y=\frac{1}{3}x^3+kx-3$ diventa quindi: $-6-y'=-\frac{1}{3}(x')^3-kx-3,$

$y'=\frac{1}{3}(x')^3+kx-3$, che coincide con la curva di partenza, quindi A è centro di simmetria per tutte le curve.

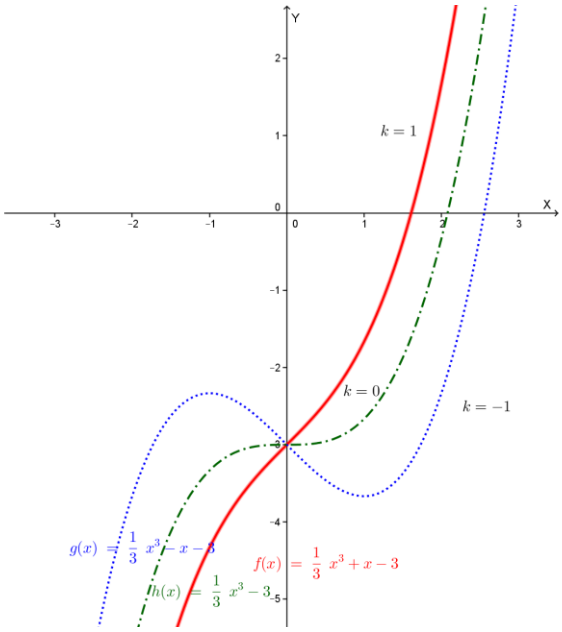
b)

Dimostrare inoltre che tutte le curve (1) hanno un massimo e un minimo relativi oppure non hanno né l'uno né l'altro.

Studiamo la derivata prima della (1): $y'=x^2+k$. Essendo la (1) derivabile in ogni punto, gli eventuali massimi e minimi relativi sono a tangente orizzontale, quindi annullano la derivata prima, perciò si le curve (1) hanno un massimo e un minimo relativi dove:
$x^2+k=0$, da cui (solo se $k\le 0$), $x=\pm\sqrt{-k}$. In particolare se k<0 abbiamo un

massimo ed un minimo relativo (la derivata prima è positiva per $x < -\sqrt{-k}\ \ vel\ \ x > \sqrt{-k}$), se k=0, essendo $x^2 + k > 0$ per ogni x diverso da 0, la funzione è sempre crescente ed ha in x=0 un flesso a tangente orizzontale; se k>0 non abbiamo né un massimo relativo né un minimo relativo, essendo la derivata prima sempre positiva, quindi la funzione è sempre crescente (per x=0 abbiamo un flesso a tangente obliqua).

Diamo degli esempi grafici per k>0, k=0, k<0:



c)

Trovare a quale valore di k corrisponde una curva (1) tangente all'asse x.

La curva è tangente all'asse x se il massimo appartiene a tale asse (si osservino i grafici precedenti), quindi se $\frac{1}{3}x^3 + kx - 3 = 0$ quando $x = -\sqrt{-k}$, perciò:

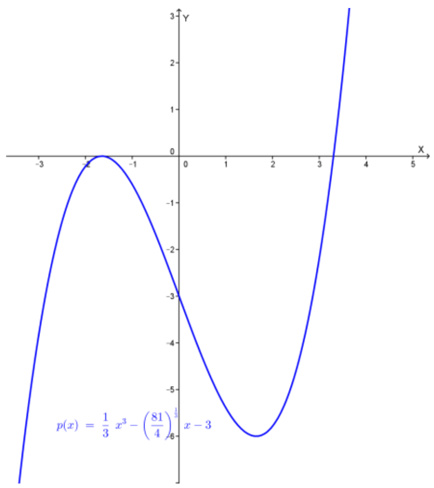
$$\frac{1}{3}\left(-\sqrt{-k}\right)^3 - k\sqrt{-k} - 3 = 0, \qquad -\frac{1}{3}\sqrt{-k^3} - k\sqrt{-k} = 3, \qquad -\frac{1}{3}|k|\sqrt{-k} - k\sqrt{-k} - 3 = 0$$

Essendo k<0:

$$\frac{1}{3}k\sqrt{-k} - k\sqrt{-k} - 3 = 0, \qquad -\frac{2}{3}k\sqrt{-k} = 3, \qquad -\frac{4}{9}k^3 = 9, \qquad k^3 = -\frac{81}{4},$$

$$k = -\sqrt[3]{\frac{81}{4}}$$

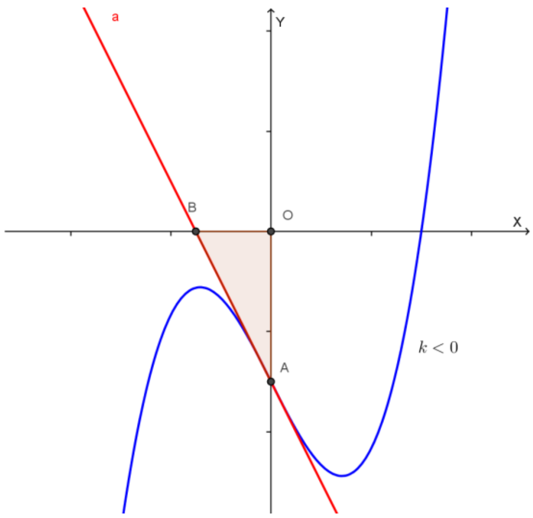
La curva ha in tal caso equazione: $y = \frac{1}{3}x^3 - \sqrt[3]{\frac{81}{4}}\,x - 3$, ed il suo grafico è:



d)

Indicare con γ quella, tra le curve (1), la cui tangente in A individua con gli assi coordinati un triangolo di area 9/4 e, nel medesimo tempo, presenta un massimo e un minimo relativi.

In base alle informazioni deve essere k<0, quindi la situazione grafica è la seguente:



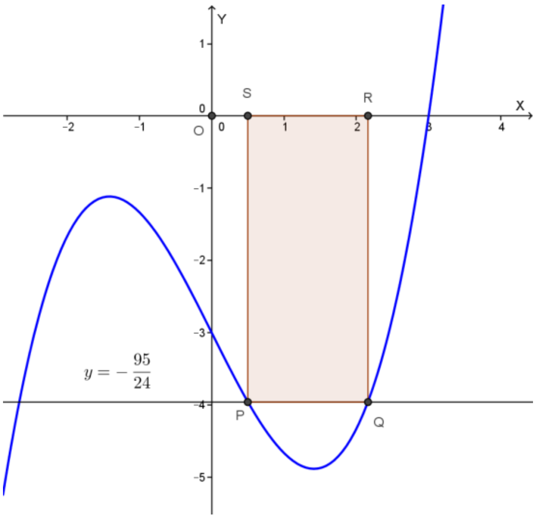
Ricordiamo che $A = (0;\ -3),\ y = \frac{1}{3}x^3 + kx - 3\ \ e\ \ y' = x^2 + k,\ da\ cui\ y'(0) =\ k$
La tangente in A ha quindi equazione: $y + 3 = k(x - 0),\ y = kx - 3$. Il punto B ha coordinate $\left(\frac{3}{k}; 0\right)$. Il triangolo richiesto, OAB, ha quindi area:

$$Area(OAB) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \left|\frac{3}{k}\right| = \frac{9}{-2k} = \frac{9}{4}, \qquad da\ cui\colon\ k = -2$$

La curva γ ha quindi equazione: $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x - 3$.

e)

Fra i rettangoli contenuti nella regione finita di piano delimitata dalla curva γ e dagli assi coordinati e aventi un lato sull'asse x e gli estremi del lato opposto sulla curva γ, determinare i vertici di quello per il quale questo secondo lato dista 95/24 dall'asse x.



L'ordinata di P e Q è $-\frac{95}{24}$ quindi le ascisse si ottengono risolvendo l'equazione:

$\frac{1}{3}x^3 - 2x - 3 = -\frac{95}{24}$ da cui: $8x^3 - 48x + 23 = 0$.

Osservandi la figura proviamo con la radice $x = \frac{1}{2}$: $1 - 24 + 23 = 0$.
Quindi l'ascissa di P e di S è $x = \frac{1}{2}$.
Applicando la regola di Ruffini otteniamo: $8x^3 - 48x + 23 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(8x^2 + 4x - 46) = 0$ e risulta:

$8x^2 + 4x - 46 = 0,\ x = \frac{-1-\sqrt{93}}{4} \cong -2.7,\quad x = \frac{-1+\sqrt{93}}{4} \cong 2.2.$

Quindi l'ascissa di Q e di R è: $x = \frac{-1+\sqrt{93}}{4}$.

I vertici del rettangolo sono quindi:

$P = \left(\frac{1}{2}; -\frac{95}{24}\right), Q = \left(\frac{-1+\sqrt{93}}{4}; -\frac{95}{24}\right),\ R = \left(\frac{-1+\sqrt{93}}{4}; 0\right),\ S = \left(\frac{1}{2}; 0\right).$

Con la collaborazione di Angela Santamaria