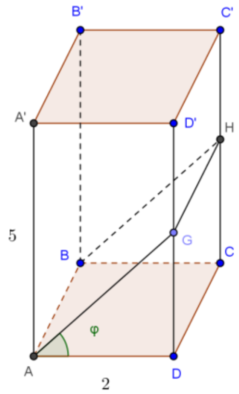
Scuole italiane all'estero (Americhe) 2005 – Suppletiva

PROBLEMA 2

Un prisma retto ha per basi i quadrati ABCD e A'B'C'D' e i suoi spigoli laterali sono AA', BB', CC', DD'. Gli spigoli di base del prisma misurano 2 cm, quelli laterali misurano 5 cm.



a)

Indicata con φ l'ampiezza dell'angolo che un piano, contenente lo spigolo AB, forma col piano della base ABCD, determinare a quale condizione deve soddisfare φ affinché il piano intersechi la faccia laterale CDD'C' del prisma.

Le posizioni limite dell'angolo φ si hanno quando $G \equiv D$ $(\varphi = 0)$ e quando $G \equiv D'$; in questo caso si ha: $tg(\varphi) = \frac{5}{2},\ quindi\ \varphi = arctg\left(\frac{5}{2}\right) \cong 68.2°$. Quindi le condizioni sull'angolo φ sono: $0 \leq \varphi \leq\ arctg\left(\frac{5}{2}\right)$.

b)

Condotto per lo spigolo AB il piano formante un angolo di 60° col piano della base ABCD, dimostrare che questo piano seca il prisma secondo un rettangolo e determinare le misure dei lati di tale rettangolo.

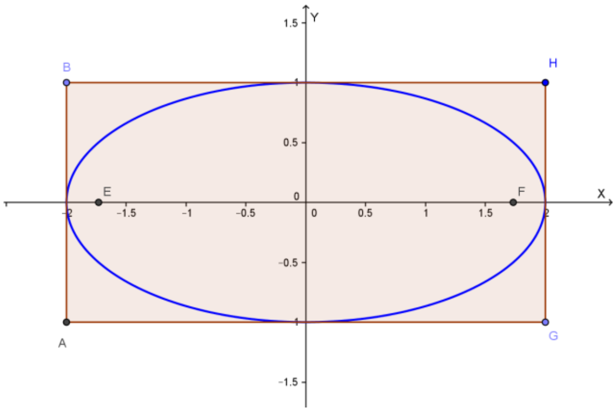
Poiché AG giace sul piano ADD'A' perpendicolare ad AB, AG è perpendicolare ad AB.
In modo analogo si verifica che BH è perpendicolare ad AB. Inoltre AG e BH sono uguali (ipotenuse dei triangoli rettangoli congruenti ADG e BCH).
Il quadrilatero ABHG ha quindi due lati opposti uguali e paralleli, perciò è un parallelogramma. Siccome BA è perpendicolare ad AG il parallelogramma è un rettangolo.

Risulta poi: $AB = GH = 2\ cm$; $AG = BH = \frac{AD}{\cos(\varphi)} = \frac{2}{\cos(60°)} = 4\ cm$

c)

Dopo aver riferito il piano del rettangolo precedente ad un conveniente sistema di assi cartesiani Oxy, trovare l'equazione dell'ellisse inscritta nel rettangolo e le coordinate dei suoi fuochi.

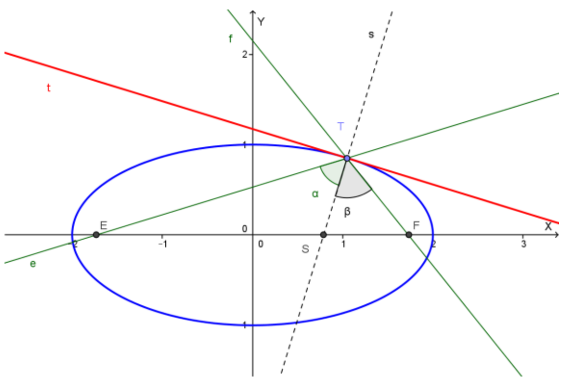
Fissiamo il sistema di riferimento con origine nel punto di incontro delle diagonali del rettangolo, asse y parallelo ad AB ed asse x parallelo ad AG come in figura:



L'ellisse inscritta nel rettangolo ha equazione: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, ed ha semiassi $a = 2\ \ e\ \ b = 1$.
La semidistanza focale c è data da: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$.
I fuochi hanno quindi coordinate: $E = \left(-\sqrt{3}; 0\right)\ \ ed\ \ F = (\sqrt{3}; 0)$.

d)

Dimostrare che la bisettrice dell'angolo avente il vertice in un punto T dell'ellisse e i lati passanti per i suoi fuochi risulta perpendicolare alla tangente all'ellisse nel punto T.



Si tratta di una nota proprietà valida per ogni ellisse. Verifichiamola nel caso proposto.

Indichiamo con $T=(a;b)$ il generico punto dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4}+y^2=1$; si ha: $\frac{a^2}{4}+b^2=1$.

Usando la cosiddetta formula di sdoppiamento, la tangente in T ha equazione:

$t\colon \frac{ax}{4}+by=1$, che ha coefficiente angolare $m=-\frac{a}{4b}$. La retta s, perpendicolare in T alla tangente t ha equazione:

$s\colon\ y-b=\frac{4b}{a}(x-a),\ \ ay-ab=4bx-4ab,\ \ \ 4bx-ay-3ab=0.$

Cerchiamo il punto S di intersezione fra la retta s e l'asse delle x:

$$S\colon \begin{cases} 4bx-ay-3ab=0 \\ y=0 \end{cases} \quad , \quad S=\left(\frac{3}{4}a;\ 0\right)$$

Per dimostrare quanto richiesto è sufficiente dimostrare che S è equidistante da e ed f (le rette ET ed FT).

Cerchiamo l'equazione e della retta ET, essendo $E=\left(-\sqrt{3};0\right)$ e $T=(a;b)$:

$$e\colon\ \frac{y}{b}=\frac{x+\sqrt{3}}{a+\sqrt{3}}\ ,\ y\left(a+\sqrt{3}\right)=b\left(x+\sqrt{3}\right),\qquad bx-y\left(a+\sqrt{3}\right)+b\sqrt{3}=0$$

Cerchiamo l'equazione f della retta FT, essendo $F=\left(\sqrt{3};0\right)$ e $T=(a;b)$:

$$f\colon\ \frac{y}{b}=\frac{x-\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}}\ ,\ y\left(a-\sqrt{3}\right)=b\left(x-\sqrt{3}\right),\qquad bx-y\left(a-\sqrt{3}\right)-b\sqrt{3}=0$$

La distanza di S da e è data da: $\dfrac{\left|\frac{3}{4}ab+b\sqrt{3}\right|}{\sqrt{b^2+\left(a+\sqrt{3}\right)^2}}$

La distanza di S da f è data da: $\dfrac{\left|\frac{3}{4}ab-b\sqrt{3}\right|}{\sqrt{b^2+\left(a-\sqrt{3}\right)^2}}$

Dimostriamo che : $\dfrac{\left|\frac{3}{4}ab+b\sqrt{3}\right|}{\sqrt{b^2+\left(a+\sqrt{3}\right)^2}}=\dfrac{\left|\frac{3}{4}ab-b\sqrt{3}\right|}{\sqrt{b^2+\left(a-\sqrt{3}\right)^2}}$

Elevando al quadrato deve essere:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}ab+b\sqrt{3}\right)^2}{b^2+\left(a+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\left(\frac{3}{4}ab-b\sqrt{3}\right)^2}{b^2+\left(a-\sqrt{3}\right)^2}\ ,\quad \frac{\left(\frac{3}{4}a+\sqrt{3}\right)^2}{b^2+\left(a+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\left(\frac{3}{4}a-\sqrt{3}\right)^2}{b^2+\left(a-\sqrt{3}\right)^2},$$

$$\frac{\left(3a+4\sqrt{3}\right)^2}{b^2+\left(a+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\left(3a-4\sqrt{3}\right)^2}{b^2+\left(a-\sqrt{3}\right)^2}$$

Ricordiamo che $\frac{a^2}{4}+b^2=1$, quindi: $b^2=1-\frac{a^2}{4}$, quindi:

$$\frac{9a^2+24a\sqrt{3}+48}{1-\frac{a^2}{4}+a^2+2\sqrt{3}a+3}=\frac{9a^2-24a\sqrt{3}+48}{1-\frac{a^2}{4}+a^2-2\sqrt{3}a+3},$$

$$\frac{9a^2+24a\sqrt{3}+48}{4+\frac{3}{4}a^2+2\sqrt{3}a}=\frac{9a^2-24a\sqrt{3}+48}{4+\frac{3}{4}a^2-2\sqrt{3}a},$$

$$\left(9a^2+24a\sqrt{3}+48\right)\left(4+\frac{3}{4}a^2-2\sqrt{3}a\right)=\left(9a^2-24a\sqrt{3}+48\right)\left(4+\frac{3}{4}a^2+2\sqrt{3}a\right)$$

$$\frac{3}{4}(9a^4-96a^2+256)=\frac{3}{4}(9a^4-96a^2+256)\quad c.v.d.$$

e)

Calcolare infine l'area della regione piana racchiusa dall'ellisse.

Ricordiamo che l'area di un ellisse di semiassi a e b è data da:

$Area=\pi ab$

Nel nostro caso (a=2 e b=1): $Area=2\pi.$

Con la collaborazione di Angela Santamaria