# Scuole italiane all'estero (Americhe) 2005 Suppletiva - Quesiti

## QUESITO 1

*La finale di nuoto "100 metri rana" è disputata da 6 atleti. Quanti sono, in teoria, i possibili ordini di arrivo?*

Il numero richiesto è uguale al numero delle disposizioni semplici di 6 oggetti a 3 a 3, quindi:

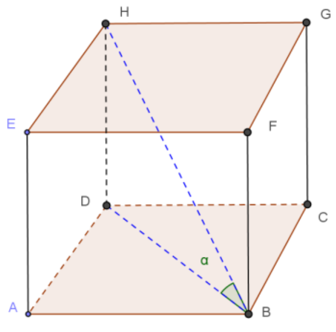
$$D_{6,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

Come dire che al primo posto può arrivare uno dei sei atleti, al secondo uno dei rimanenti cinque e al terzo uno dei rimanenti quattro.

## QUESITO 2

*Calcolare un valore, approssimato a meno di un grado centesimale, dell'angolo che una diagonale del cubo forma con una delle facce.*

Ricordiamo che il grado centesimale è definito come la centesima parte dell'angolo retto. Sulle calcolatrici il grado centesimale è indicato con GRAD, mentre il grado sessagesimale è indicato con DEG.




Indicato con s lo spigolo del cubo e detto $\alpha$ l'angolo che la diagonale BH forma con la faccia ABCD, risulta:

$$DH = BH sen\alpha,\ sen\alpha = \frac{DH}{BH} = \frac{s}{s\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, quindi: \alpha = sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cong 35.3° \ sessagesimali$$

Per trovare l'angolo $\alpha$ in gradi centesimali $\alpha^c$ risolviamo la seguente proporzione:

$$35.3°: 90° = \alpha^c : 100^c \ , \quad \alpha^c = \frac{35.3° \cdot 100^c}{90°} \cong 39^c.$$

## QUESITO 3

*Sia $S_n$ la somma di $n$ numeri in progressione aritmetica di primo termine 1/2 e ragione 3/2. Calcolare il seguente limite:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}\,.$$

Ricordiamo che la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica è data da:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

Inoltre, detta d la ragione, si ha:

$$a_n=a_1+(n-1)d=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(n-1)$$

Pertanto:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{1}{2}n\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(n-1)\right]=\frac{1}{2}n\left(\frac{3}{2}n-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}n(3n-1)$$

Si quindi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{4}n(3n-1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}n^2}{n^2}=\frac{3}{4}$$

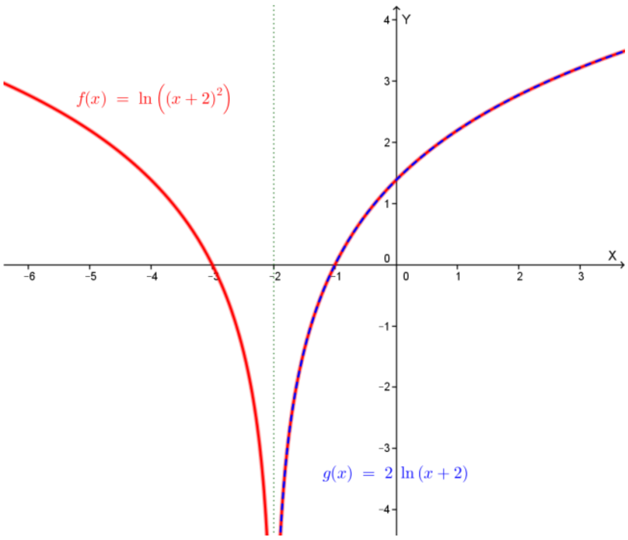
## QUESITO 4

*È vero o falso che il grafico della funzione $ln(x+2)^2$ coincide con quello della funzione $2ln(x+2)$ ? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.*

FALSO.

Infatti risulta: $ln(x+2)^2=2\ln|x+2|$, il cui grafico coincide con quello di $2ln(x+2)$ solo se $x>-2$.

Indichiamo i grafici delle due funzioni (anche se non richiesti).




## QUESITO 5

*Utilizzando il procedimento preferito, dimostrare la seguente proprietà: "Se due numeri reali positivi variano in modo che il loro prodotto si mantenga costante, allora la loro somma è minima quando essi sono uguali".*

### Dimostrazione elementare

Consideriamo l'identità: $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 2xy$, dove x ed y sono numeri reali positivi; da questa identità deduciamo che il minimo di $(x+y)^2$, quindi anche il minimo di $x+y$, si ha quando è minima la quantità $(x-y)^2 + 2xy$, in cui 2xy è costante: tale quantità è quindi minima quando $(x-y)^2 = 0$, $x = y$.
"Se due numeri reali positivi hanno prodotto costante la loro somma è minima quando sono uguali".

### Dimostrazione analitica

Da $s = x + y$ e $x \cdot y = k$ $(\text{costante} > 0)$ otteniamo:

$y = \frac{k}{x}$ , $s = x + \frac{k}{x}$ con $0 < x < k$ ; quindi:

$s' = 1 - \frac{k}{x^2} \geq 0$ se $\frac{k}{x^2} \leq 1$ da cui $x^2 \geq k$ quindi $x \geq \sqrt{k}$ (ricordiamo che k>0).

Possiamo quindi dire che la funzione s presce se $x > \sqrt{k}$ e decresce se $0 < x < \sqrt{k}$ : quindi per $x = \sqrt{k}$ abbiamo un minimo relativo (che è anche assoluto); posto $x = \sqrt{k}$ in $x \cdot y = k$ otteniamo che $y = \sqrt{k}$: s è minima quando i due numeri sono uguali.

## QUESITO 6

*Trovare la funzione $f(x)$ avente come primitiva la funzione $tan\sqrt{x}$ .*

Posto $F(x) = tan\sqrt{x}$, risulta: $f(x) = F'(x) = \left(1 + \tan^2 \sqrt{x}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

## QUESITO 7

*Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale $f(x)$ tale che*

$$f\,(0) = 0, \qquad f'(1) \ = 1, \qquad f''(2) = 2\,.$$

Partiamo da $f''(x) = x,$ che soddisfa la condizione $f''(2) = 2$. Risulta: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + a$.
Imponendo che $f'(1) \ = 1$, si ha: $\frac{1}{2} + a = 1,\ a = \frac{1}{2},\ \ f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$.

Sarà quindi:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + b, \quad con \ \ f(0) = 0, \qquad da\ cui\ \ b = 0.$$

Un esempio di funzione che soddisfa le condizioni poste è quindi: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x$.

Con la collaborazione di Angela Santamaria