Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2005 – PROBLEMA 1

Sia $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$ *e sia F(x) la sua primitiva tale che F(1) = f(1). Siano inoltre* φ *e* ϕ *le curve rappresentative rispettivamente di f e F .*

$$F(x) = \int \frac{x^2+1}{x^2}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = x - \frac{1}{x} + C\ ;\ \ F(1) = C = f(1) = 2:$$

$$F(x) = x - \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2+2x-1}{x}$$

a)

Nel piano riferito ad assi cartesiani, ortogonali e monometrici, si disegnino φ *e* ϕ *.*

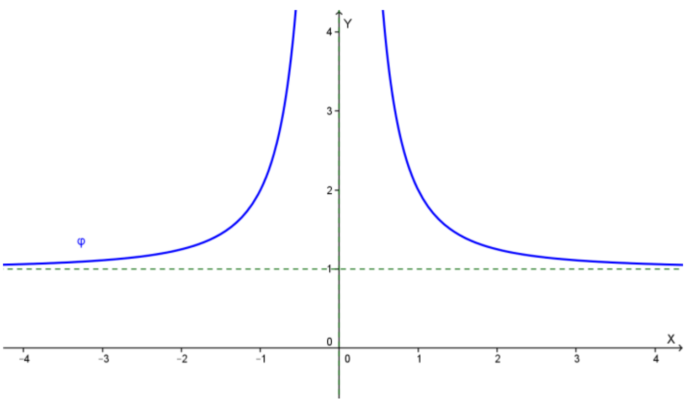
Studiamo f.

$$y = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

La funzione è definita per ogni x diverso da zero ed ha gli asintoti y=1 e x=0.
La funzione è pari (quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y) ed il suo grafico non interseca gli assi cartesiani. La funzione è sempre positiva.
Studio della derivata prima:
$f'(x) = -\frac{2}{x^3} > 0\ \ se\ x < 0$: la funzione cresce per x<0 e decresce per x>0; non ci sono massimi né minimi.
Studio della derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0\ \ in\ tutto\ il\ dominio: concavità\ sempre\ verso\ l'alto, nessun\ flesso.$$

Grafico φ di f:



Studiamo F.

$$F(x) = x - \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = y; \quad x^2 - xy + 2x - 1 = 0$$

Si tratta chiaramente di una conica, ed in particolare, essendo definita per ogni x diverso da 0, di un'iperbole. Gli asintoti so x=0 e y=x+2 (ricordiamo che se una funzione può esprimersi nella forma mx+q+g(x), con g(x) infinitesimo per x che tende all'infinito, essa ammette l'asintoto r di equazione y=mx+q (si veda l'approfondimento sugli asintoti alla pagina http://www.matefilia.it/argomen/asintoti/asintoti.htm).

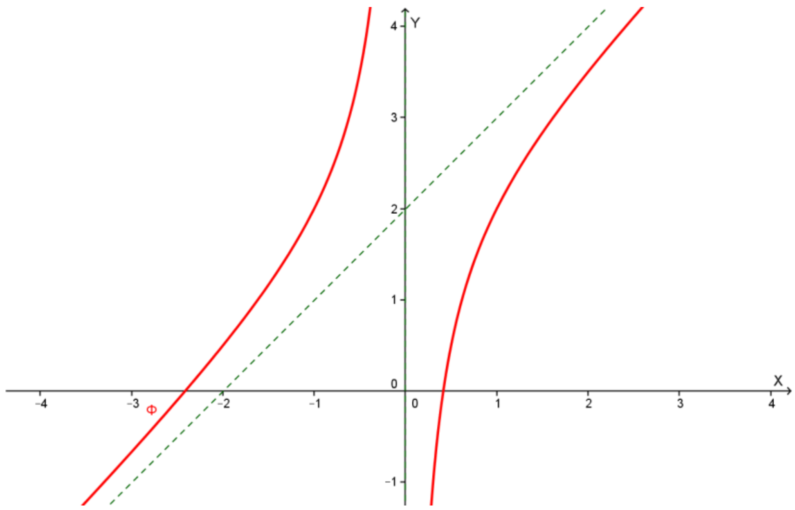
Studio della derivata prima:

$F'(x) = f(x) = \frac{x^2+1}{x^2} > 0$ in tutto il dominio: la funzione è crescente per x<0 e per x>0; non ci sono massimi né minimi.

Studio della derivata seconda:

$F''(x) = f'(x) = -\frac{2}{x^3} > 0$ per x<0; abbiamo quindi la concavità verso l'alto per x<0 e verso il basso per x>0; non ci sono flessi.

Grafico ϕ di F:



Per completezza cerchiamo le intersezioni con l'asse x:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} = 0, \quad x^2 + 2x - 1 = 0, \qquad x = -1 \pm \sqrt{2}$$

b)

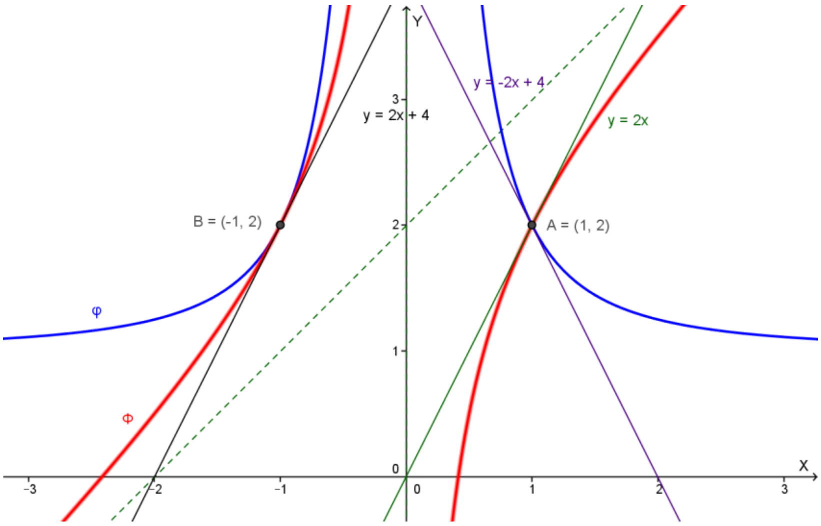
Si determinino le coordinate dei punti comuni a φ e ϕ e le equazioni delle tangenti alle due curve in tali punti.

I punti comuni alle due curve si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+1}{x^2} \\ y = \dfrac{x^2+2x-1}{x} \end{cases} \; ; \; \frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x^2+2x-1}{x} \quad ; \quad x^2+1 = x^3+2x^2-x \; ; \; x^3+x^2-x-1=0$$

$x^2(x+1)-(x+1)=0, \quad (x+1)(x^2-1)=0: \; x=-1 \; (doppia), \qquad x=1$

Se $x=\pm 1$, $\; y=2$. Le curve φ e ϕ hanno in comune i punti $A=(1;2)$ e $B=(-1;2)$, in particolare sono tangenti nel punto B:



La tangente in B è comune alle due curve ed ha equazione: $y-2 = f'(-1)(x+1)$, $y-2=2(x+1)$, $y=2x+4$

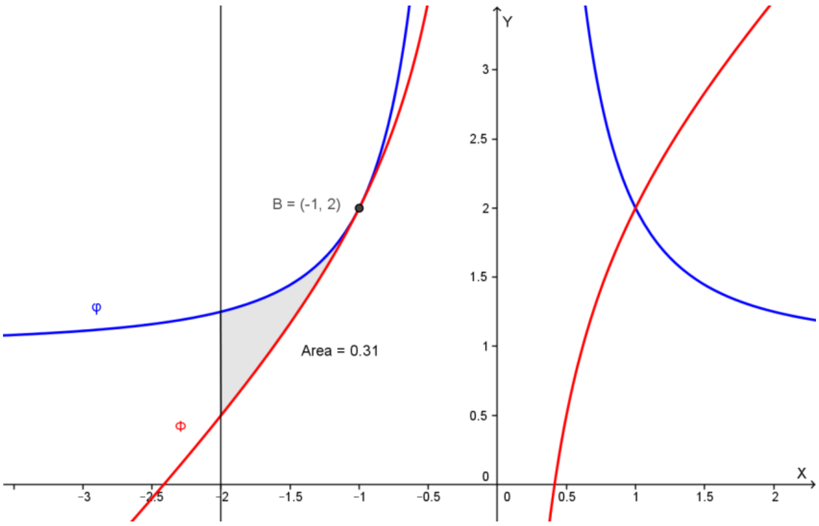
La tangente in A a φ ha equazione: $y-2=f'(1)(x-1)$, $y=-2x+4$

La tangente in A a ϕ ha equazione: $y-2=F'(1)(x-1)$, $y-2=2(x-1)$, $\; y=2x$

c)

Si determini l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e dalla retta $x+2=0$.

La regione richiesta è indicata nella figura seguente:



L'area della regione indicata si ottiene mediante il seguente calcolo integrale:

$$\int_{-2}^{-1}[f(x)-F(x)]\,dx=\int_{-2}^{-1}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x-\frac{1}{x}+2\right)\right]dx=\int_{-2}^{-1}\left(-1+\frac{1}{x^2}-x+\frac{1}{x}\right)dx=$$

$$=\left[-x-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}x^2+\ln|x|\right]_{-2}^{-1}=1+1-\frac{1}{2}-\left(2+\frac{1}{2}-2+ln2\right)=(1-ln2)\,u^2\cong 0.31\,u^2$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria