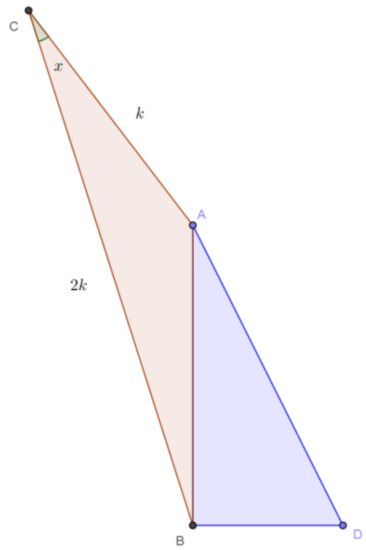
Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2005 – PROBLEMA 2

Il triangolo ABC ha il lato BC che è il doppio di CA di lunghezza k mentre il triangolo rettangolo ABD, con D dalla parte opposta di C rispetto ad AB, ha il cateto AB che è il doppio di BD.



a)

Si esprima l'area del quadrilatero ADBC in funzione dell'angolo $A\hat{C}B$.

Per il teorema del coseno abbiamo:

$$AB^2 = k^2 + 4k^2 - 4k^2 cosx = 5k^2 - 4k^2 cosx, \quad quindi: \; AB = k\sqrt{5 - 4cosx} = 2BD$$

Risulta pertanto:

$$Area(ADBC) = Area(ABC) + Area(ABD) = \frac{1}{2}(k)(2k)senx + \frac{1}{2}AB \cdot BD =$$
$$= k^2 senx + \frac{1}{2} \cdot \left(k\sqrt{5 - 4cosx}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\, k\sqrt{5 - 4cosx}\right) = k^2 senx + \frac{1}{4}k^2(5 - 4cosx)$$

Quindi:

$$Area(ADBC) = \frac{1}{4}k^2(4senx - 4cosx + 5)$$

b)

Si determini il valore di $A\hat{C}B$ cui corrisponde il quadrilatero di area massima.

$$Area(ADBC) = \frac{1}{4}k^2(4senx - 4cosx + 5) = k^2\left(senx - cosx + \frac{5}{4}\right)$$

Osserviamo che:

$$senx - cosx = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}senx - \frac{\sqrt{2}}{2}cosx\right) = \sqrt{2}sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Quindi:

$Area(ADBC) = k^2\left(\sqrt{2}sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{4}\right) = massima$ se $sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{4}\pi$

Il quadrilatero ha area massima se $A\hat{C}B = \frac{3}{4}\pi$.

c)

Di tale quadrilatero si determini area e perimetro.

L'area del quadrilatero vale: $k^2\left(\sqrt{2} + \frac{5}{4}\right)$.

Il perimetro è dato da: $2p = k + 2k + BD + AD$

Ma risulta:

$$AB = k\sqrt{5 - 4cosx} = k\left(\sqrt{5 - 4cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)}\right) = k\left(\sqrt{5 + 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = k\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$$

$$BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}k\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$$

Perciò:

$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2} = \sqrt{k^2(5 + 2\sqrt{2}) + \frac{1}{4}k^2(5 + 2\sqrt{2})} = \sqrt{\frac{5}{4}k^2(5 + 2\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{2}k\sqrt{5}\left(\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}\right)$$

Ed allora:

$$2p = k + 2k + BD + AD = 3k + \frac{1}{2}k\sqrt{5+2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}k\sqrt{5}\left(\sqrt{5+2\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}k\left(6 + \sqrt{5+2\sqrt{2}} + \sqrt{5}\left(\sqrt{5+2\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{2}k\left[6 + \left(\sqrt{5+2\sqrt{2}}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}k\left[6 + \sqrt{\left(5+2\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)^2}\right] = \frac{1}{2}k\left[6 + \sqrt{\left(5+2\sqrt{2}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}k\left(6 + \sqrt{\left(5+2\sqrt{2}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}\right)$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria