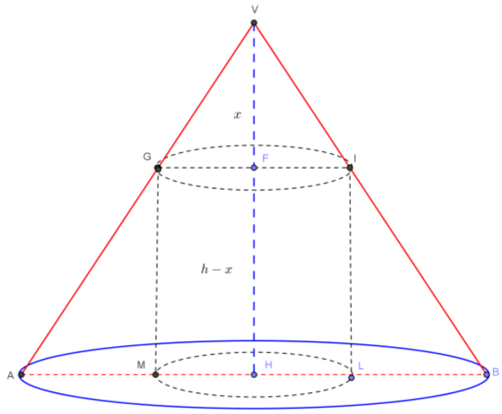
Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2005

QUESITO 1

Prova che fra tutti i cilindri inscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte di quella del cono.



Indicata con x la distanza della base superiore del cilindro dal vertice del cono si ha:

$$V(cilindro) = \pi R^2 h = \pi \cdot FG^2 \cdot (h - x)$$

Troviamo FG, raggio del cilindro, in funzione di x ($r = raggio\ cono = \frac{a}{2}$):

$$AH: FG = VH: VF\ , \quad r: FG = h: x, \quad FG = \frac{x \cdot r}{h}$$

Quindi:

$$V(cilindro) = \pi \cdot \left(\frac{x \cdot r}{h}\right)^2 \cdot (h - x) = \frac{\pi \cdot r^2}{h^2} \cdot x^2 \cdot (h - x)$$

Tale volume è massimo se lo è:

$$y = x^2 \cdot (h - x), \quad con\ \ 0 \le x \le h$$

Il problema è di facile soluzione con l'uso delle derivate, proponiamo un metodo elementare.

Ricordiamo che se $a + b = costante$ il prodotto di due potenze di a e b è massimo quando le basi sono proporzionali agli esponenti. Nel nostro caso: a=x e b=h-x .

Quindi $x^2 \cdot (h - x)$ è massimo se: $\frac{x}{2} = \frac{h-x}{1}$, $x = 2h - 2x$, $x = \frac{2}{3}h$.

Per tale valore di x l'altezza del cilindro è: $h - x = \frac{1}{3}h$.

Il cilindro di volume massimo è quindi quello la cui altezza è un terzo dell'altezza del cono.

QUESITO 2

S_n indica la somma di n termini in progressione geometrica, di primo termine 1/3 e ragione 1/3. Calcola $lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$.

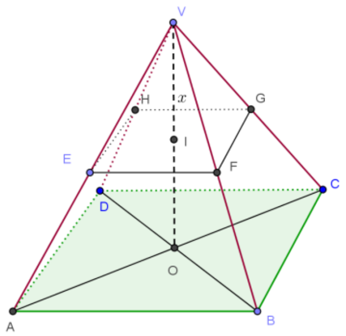
Risulta:

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$$

QUESITO 3

Una piramide ha la base quadrata e l'altezza uguale a 10cm. Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7:3? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide?



Indicata con x la distanza dal vertice della piramide del piano parallelo alla base, per una nota proprietà delle piramidi si ha:

$$Area(ABCD):Area(EFGH)=10^2:x^2,\quad Area(EFGH)=\frac{x^2\cdot Area(ABCD)}{100}$$

Detto V_1 il volume della piramide di base EFGH e vertice V e V_2 il volume della piramide di base ABCD e vertice V, deve essere:

$$V_1=\frac{3}{10}V_2\quad oppure\quad V_1=\frac{7}{10}V_2$$

Nel primo caso si ha:

$V_1=\frac{1}{3}Area(EFGH)\cdot x=\frac{3}{10}\left(\frac{1}{3}Area(ABCD)\cdot 10\right)$ da cui: $\frac{x^2\cdot Area(ABCD)}{100}\cdot x=3Area(ABCD)$,

$$x^3=300\ ;\quad x=\sqrt[3]{300}\ cm$$

Nel secondo caso si ha:

$V_1=\frac{1}{3}Area(EFGH)\cdot x=\frac{7}{10}\left(\frac{1}{3}Area(ABCD)\cdot 10\right)$ da cui:

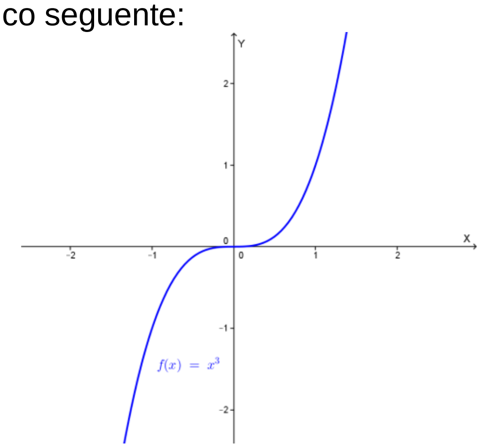
$\frac{x^2\cdot Area(ABCD)}{100}\cdot x=7\cdot Area(ABCD)$,

$$x^3=700\ ;\quad x=\sqrt[3]{700}\ cm$$

QUESITO 4

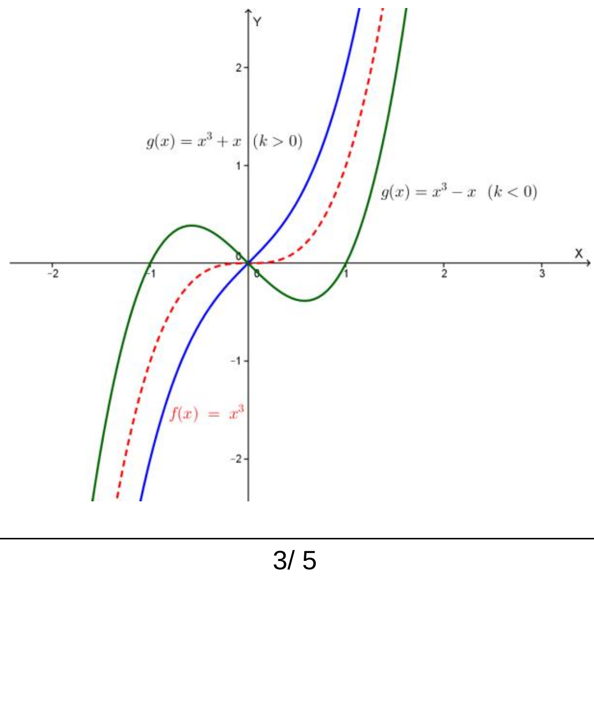
Considera la cubica $y = x^3$ e illustra le variazioni che intervengono nel suo grafico per l'aggiunta ad x^3 di un termine kx al variare di k nell'insieme dei numeri reali.

La cubica $y = x^3$ ha il grafico seguente:



Analizziamo la funzione $y = g(x) = x^3 + kx$.
Essendo $y' = 3x^2 + k \;\; e \;\; y'' = 6x$ il grafico di g avrà, per ogni k, un flesso in (0; 0) e la concavità verso l'alto se x>0 e verso il basso se x<0. Dipenderà invece dal segno di k la presenza di massimi e minimi relativi. In particolare:
Se k>0: $y' > 0$ per ogni k, quindi la funzione è sempre crescente; il grafico di f si modifica solo per la tangente inflessionale.
Se k<0: $y' > 0$ se $x < -\sqrt{-\frac{k}{3}} \quad vel \quad x > \sqrt{-\frac{k}{3}}$; quindi abbiamo un massimo relativo per $x = -\sqrt{-\frac{k}{3}}$ ed un minimo relativo per $x = \sqrt{-\frac{k}{3}}$.
Notiamo infine che risulta $x^3 + kx = x(x^2 + k) = 0$ se:
per k>0 solo per x=0, se k<0 per x=0 e per $x = \pm\sqrt{-k}$.

Ovviamente se k=0 la funzione non si modifica. Indichiamo i tre casi possibili graficamente (per semplicità abbiamo posto k=1 e k=-1):



QUESITO 5

Due lati di un triangolo misurano a e b. Determina il terzo lato in modo che l'area sia massima.

Detto x l'angolo compreso fra i lati di misura a e b, l'area del triangolo può essere espressa nella forma:

$$A = \frac{1}{2} ab\, senx$$

Tale espressione è massima quando è massimo sen(x), cioè quando sen(x)=1, perciò per $x = \frac{\pi}{2}$. Il triangolo di area massima è quindi quello rettangolo con cateti a e b.
Il terzo lato del triangolo misura $\sqrt{a^2 + b^2}$.

QUESITO 6

Calcola la derivata della funzione $y = arctan\, x + arctan \frac{1}{x}$.
Cosa puoi dire della funzione? É costante? Illustra il perché della tua risposta.

La derivata della funzione è:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Siccome la funzione è definita per x<0 e x>0, possiamo dire che funzione è costante a tratti; posto $a = \arctan x \quad e \quad b = \arctan \frac{1}{x}$ abbiamo: $x = \tan a$, $\frac{1}{x} = \tan b$ quindi:

$\tan a = \frac{1}{\tan b} = cotan\, b = tan\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$, pertanto:

$a = \frac{\pi}{2} - b + k\pi, \quad a + b = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

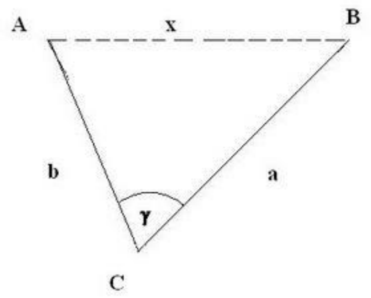
Per x>0 risulta $a = \arctan x > 0$ e $b = \arctan \frac{1}{x} > 0$, quindi a+b>0, perciò:
Se $x > 0 \quad arctan\, x + arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Per x<0 risulta $a = \arctan x < 0$ e $b = \arctan \frac{1}{x} < 0$, quindi a+b<0, perciò:
Se $x > 0 \quad arctan\, x + arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$.

QUESITO 7

Spiega come utilizzeresti il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili ma separati da un ostacolo.

Siano A e B i due punti (entrambi accessibili) separati da un ed indichiamo con x la loro distanza.



Fissiamo un punto C (accessibile) di cui è possibile misurare la distanza b da A ed a da B. Da C inquadriamo A e B (per esempio con un teodolite) e misuriamo l'angolo $A\hat{B}C = \gamma$
Per trovare x possiamo perciò applicare il teorema del coseno (detto di Carnot):

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\gamma)$$

Ed estraendo la radice quadrata: $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos(\gamma)}$.

QUESITO 8

Quando una funzione f è invertibile? Come si può calcolare la derivata della funzione inversa f^{-1}? Fai un esempio.

Data una funzione $f: A \to B$, essa si dice invertibile se esiste una corrispondenza biunivoca fra dominio e codominio; la funzione $f^{-1}: B \to A$, che ha come dominio il codominio di e f e come codominio il dominio di f, si dice funzione inversa di f.
Una funzione strettamente monotona in un intervallo è invertibile (non è detto il viceversa).

Posto $y = f(x)$, la sua funzione inversa è $x = f^{-1}(y) = g(y)$. Se f è derivabile in un punto x_0 con derivata non nulla, detto $y_0 = f(x_0)$ si ha: $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
Esempio: $y = f(x) = e^x,\ x = f^{-1}(y) = g(y) = \ln(y),\ x_0 = 0,\ f'(x) = e^x;$

$$f'(x_0) = f'(0) = 1; \quad y_0 = f(0) = 1 \ ; \quad g'(y) = \frac{1}{y} \ , \quad g'(y_0) = \frac{1}{1} = 1 = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria