Scuole italiane all'estero (Calendario australe suppletiva) 2005

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita da $f(x) = \sin(x) + a\cos(x) + b,\ con\ \ x \in [-\pi; \pi]$.

1)

Calcolate a e b in modo che $x = \frac{\pi}{6}$ *sia punto di massimo relativo e* $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

La funzione è continua e derivabile su tutto l'intervallo dato ed è:
$f'(x) = \cos(x) - a\sin(x)$. Deve essere:

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{1}{2} + a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + b = 0; \ \ 1 + \sqrt{3}a + 2b = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}a = 0; \ \ a = \sqrt{3} \end{cases} ; \quad \begin{cases} b = -2 \\ a = \sqrt{3} \end{cases}$$

Risulta quindi:

$$f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) - 2 = 2\left(\frac{1}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)\right) - 2 = 2sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 =$$

2)

Tracciate il grafico λ *della funzione così ottenuta e dite se essa ha un massimo assoluto e un minimo assoluto.*

$$\boldsymbol{f(x) = 2sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2}$$

Il grafico di λ si ottiene dalla funzione seno mediante i seguenti passaggi:

$y = \sin(x)$

$y = sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right):\ traslazione\ verso\ sinistra\ di\ \frac{\pi}{3}$

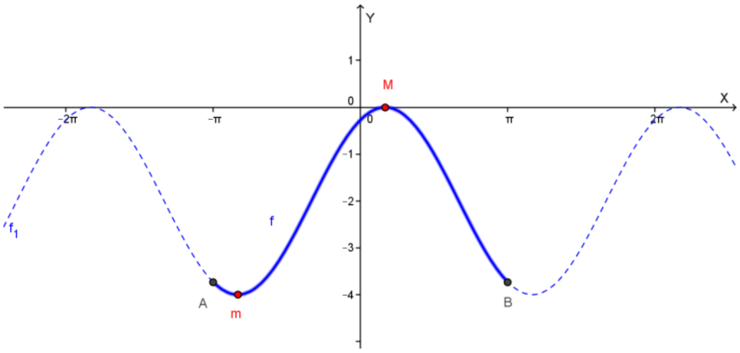
$y = 2\ sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right):\ dilatazione\ verticale\ di\ fattore\ 2$

$y = \ 2\ sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\ :\ \ traslazione\ verso\ il\ basso\ di\ 2$

Il massimo assoluto della funzione si ha quando $sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1,\ x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},\ x=\frac{\pi}{6}$ e tale massimo vale 0.

Il minimo assoluto della funzione si ha quando $sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1,\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2},\ x=-\frac{5}{6}\pi$ e tale minimo vale $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2(-1)-2=-4$

Il grafico della funzione è il seguente:

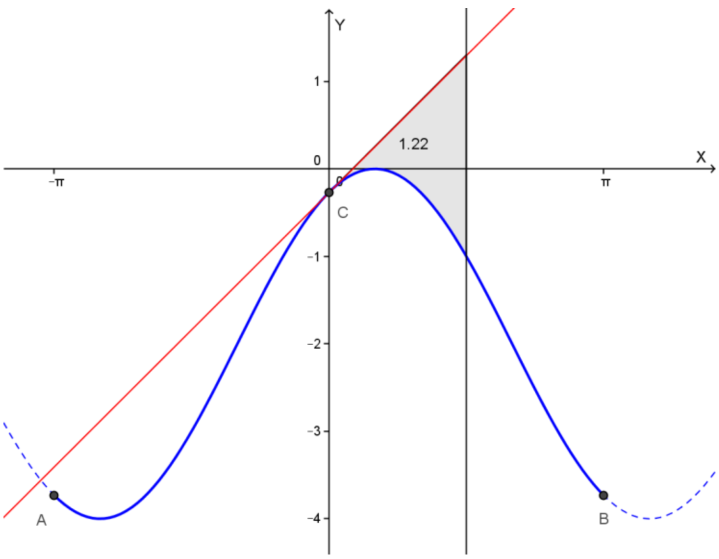


3)

Calcolate l'area della regione finita di piano delimitata dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa nulla, da λ e dalla retta $x=\frac{\pi}{2}$.

Il punto C di λ di ascissa nulla ha ordinata $f(0)=\sqrt{3}-2$. La tangente in C alla curva ha coefficiente angolare $f'(0)$. Risulta: $f'(x)=2cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, quindi $f'(0)=1$. La tangente in C ha pertanto equazione: $y-\left(\sqrt{3}-2\right)=x,\quad y=x+\sqrt{3}-2$.

La regione richiesta è rappresentata nella seguente figura:



L'area della regione è data da:

$$Area = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[x + \sqrt{3} - 2 - \left(2sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\right)\right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[x + \sqrt{3} - 2sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}x + 2cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1}{8}\pi^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi - 1 - \left(\sqrt{3}\right)\right] u^2 \cong 1.22\ u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria