Scuole italiane all'estero (Calendario australe) 2005 – Suppletiva

QUESITO 1

L'equazione $f\,(b) - f\,(a) = f\,'(c)(b - a)$ esprime il teorema del valore medio o di Lagrange. Determinare c quando $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $a = 0$ e $b = 1$.

La funzione data è continua nell'intervallo chiuso [a; b]=[0; 1]; la sua derivata è:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Quindi f è derivabile nell'aperto (0; 1): sono quindi soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Risulta:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,, \qquad \sqrt[3]{x} = \frac{2}{3}, \quad c = \frac{8}{27}.$$

QUESITO 2

Un recipiente contiene 1000 litri di liquido. Se è un prisma regolare a base triangolare, quali ne sono le dimensioni minime, espresse in metri?

Ipotizziamo che per "dimensioni minime" si intenda "superficie totale minima".

Detto l il lato del triangolo equilatero di base e h l'altezza del prisma, il volume, deve essere $1000\ litri = 1000\ dm^3 = 1\ m^3$.

Ma il volume del prisma è dato da: $V = A_b \cdot h = \left(l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}\right)h = 1,\quad l^2h = \frac{4}{\sqrt{3}},\quad h = \frac{4}{l^2\sqrt{3}}$

La superficie totale è data da:

$$S_t = 2A_b + (2p)_b \cdot h = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3lh = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3l \cdot \frac{4}{l^2\sqrt{3}} = l^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{l}, \quad l > 0$$

La superficie totale è minima se lo è la funzione:

$$y = \frac{1}{2}l^2 + \frac{4}{l}, \quad con\, l > 0$$

Studiamo la derivata prima:

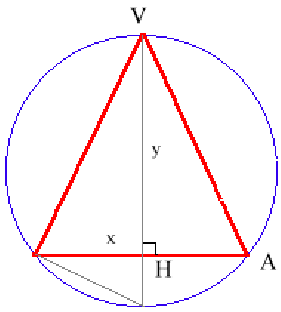
$$y' = l - \frac{4}{l^2} \geq 0 \quad se \quad l^3 \geq 4, \quad l \geq \sqrt[3]{4}$$

Quindi y cresce se $l > \sqrt[3]{4}$ e decresce se $0 < l < \sqrt[3]{4}$: y è minima se $l = \sqrt[3]{4}\ m$; per tale valore di l risulta: $h = \frac{4}{l^2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt[3]{16}\sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt[6]{108}} = \frac{\sqrt[6]{108}}{54}\ m$.

Il prisma di dimensioni minime ha spigolo di base $l = \sqrt[3]{4}\ m$ e altezza $h = \frac{\sqrt[6]{108}}{54}\ m$.

QUESITO 3

Quale è il cono di volume massimo inscrivibile in una sfera assegnata?



Indichiamo con y l'altezza del cono e con x il suo raggio di base. Per il secondo teorema di Euclide (detto R il raggio della sfera) si ha: $x^2 = y(2R - y)$. Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Tale volume è massimo se lo è $z = x^2 y = y^2(2R - y)$

Risoluzione elementare.

$y^2(2R - y) = (y)^2(2R - y)^1$: si tratta del prodotto di due potenze con somma delle basi costante (2R); tale prodotto è massimo se le basi sono proporzionali agli esponenti, quindi:

$\frac{y}{2} = \frac{2R - y}{1}, \quad y = \frac{4}{3}R \ \ (altezza\ del\ cono\ uguale\ ai\ \ \frac{4}{3}\ \ del\ raggio\ della\ sfera)$

Il cono di volume massimo inscritto in una sfera di dato raggio è quello la cui altezza è i 4/3 del raggio della sfera.

Risoluzione analitica.

Dobbiamo trovare il massimo della funzione $z = y^2(2R - y), \quad con\ 0 \le y \le 2R$
Risulta:

$$z' = 4Ry - 3y^2 \ge 0 \quad se \quad 3y^2 - 4Ry \le 0\!: \ \ 0 \le y \le \frac{4}{3}R$$

La funzione è quindi crescente se $0 < y < \frac{4}{3}R$ e decrescente se $\frac{4}{3}R < y < 2R$.

Per $y = \frac{4}{3}R$ z (e quindi anche il volume del cono) assume il valore massimo.

QUESITO 4

La funzione $f(x) = 10^{x+8}$ *è invertibile? Perché? Quale ne è la derivata? In genere, come si calcola la derivata della funzione inversa* f^{-1} *?*

Risulta: $f(x) = 10^{x+8} = 10 \cdot 10^{x}$, che è continua su tutto R ed è strettamente crescente, quindi è invertibile.

La sua derivata è:

$$f'(x) = 10^{x+8} ln10$$

In genere, detta $y = f(x)$ una funzione invertibile, detta $x = g(y) = f^{-1}(y)$ la sua inversa, si ha (quando $f'(x) \neq 0$):

$$x' = g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \qquad con\ y = f(x)$$

Osserviamo che, da $y = 10^{x+8}$, si ottiene: $x + 8 = \log_{10} y, \quad x = \log_{10} y - 8$.

Quindi l'inversa di $y = 10^{x+8}$ è $y = \log_{10} x - 8$.

Ricordiamo che i grafici di queste due funzioni sono simmetrici rispetto alla retta y=x.

QUESITO 5

Dimostrare che la funzione $f(x) = cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *ha infiniti punti di massimo e minimo relativo in]0;1]. In quali punti la funzione assume valore 1 e in quali –1?*

La funzione data è definita per ogni x non nullo ed è massima quando il coseno vale 1, cioè: $\frac{1}{x} = 2k\pi,\ x = \frac{1}{2k\pi}\ \ (con\ k \in Z\ e\ non\ nullo)$. La funzione è minima quando il coseno vale -1, cioè: $\frac{1}{x} = \pi + 2k\pi,\ \ x = \frac{1}{\pi(2k+1)}\ (con\ k \in Z)$.

Limitandoci all'intervallo $0 < x \leq 1$ abbiamo:

infiniti punti di massimo relativi: $x = \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi}, \frac{1}{6\pi}, \ldots$

e infiniti punti di minimo relativi: $x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{3\pi}, \frac{1}{5\pi}, \ldots$

La funzione assume il valore 1 per $x = \frac{1}{2k\pi}\ \ (con\ k \in Z\ e\ non\ nullo)$ ed il valore -1 per $x = \frac{1}{\pi(2k+1)}\ (con\ k \in Z)$.

QUESITO 6

Fra tutte le primitive di $f(x) = 3\cos^3(x)$ trovare quella il cui grafico passa per il punto (0;5).

Calcoliamo la più generale primitiva della funzione data:

$$F(x) = \int 3\cos^3(x)\,dx = 3\int \cos(x)\left(1 - sen^2(x)\right)dx =$$

$$= 3\int \cos(x)\,dx - 3\int \cos(x)\,sen^2(x)dx = 3sen(x) - 3\left[\frac{sen^3(x)}{3}\right] + k$$

Quindi: $F(x) = 3sen(x) - sen^3(x) + k$. Imponendo il passaggio per (0; 5) si ha: $5 = k$.
La primitiva richiesta è quindi:

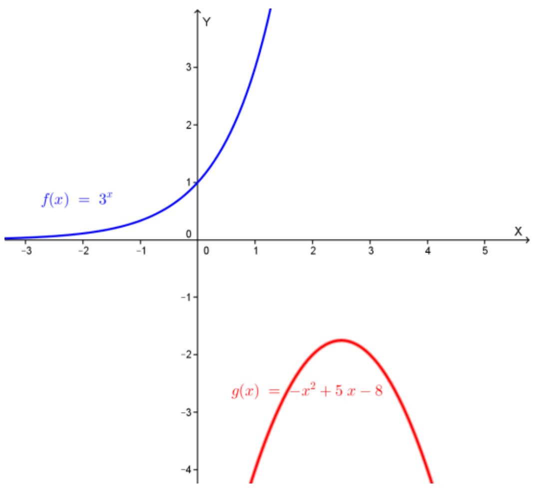
$$F(x) = 3sen(x) - sen^3(x) + 5$$

QUESITO 7

Spiegare perché l'equazione $3^x = -x^2 + 5x - 8$ *non ammette soluzioni.*

Rappresentiamo graficamente le funzioni $y = 3^x \quad e \quad y = -x^2 + 5x - 8$.
La prima è un'esponenziale con base 3 e la seconda una parabola con vertice di coordinate: $x_V = \frac{5}{2}$, $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{25-32}{-4} = -\frac{7}{4}$: $V = \left(\frac{5}{2}; -\frac{7}{4}\right)$. La parabola ha la concavità verso il basso e non taglia l'asse x: quindi, essendo il primo membro sempre positivo ed il secondo sempre negativo l'equazione non può ammettere soluzioni.

Graficamente:



QUESITO 8

Perché tutte le tangenti alla curva d'equazione $y = x^3 + 3x - 4$ *formano un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse x ? Illustra le ragioni della tua risposta.*

Detto $P(x; y)$ il generico punto della curva, la tangente in P ha coefficiente angolare:

$$m = f'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \ \ per\ ogni\ x$$

Ma m rappresenta la tangente goniometrica dell'angolo formato dalla retta tangente con la direzione positiva dell'asse x; essendo m sempre positivo, l'angolo risulta sempre acuto.

Con la collaborazione di Angela Santamaria