Scuole italiane all’estero (Europa) 2005 – PROBLEMA 1

La funzione f è definita da $f(x) = x^3 - 6x^2 + k$ *dove k è una costante arbitraria.*

1)

Si trovino, in funzione di k, i valori di minimo e massimo relativo di f .

Si tratta di una funzione razionale intera, definita, continua e derivabile su tutto R.
Studiamo la derivata prima:
$f'(x) = 3x^2 - 12x \geq 0 \;\; se \;\; x^2 - 4x \geq 0: \;\; x \leq 0 \quad or \quad x \geq 4.$
La funzione è quindi crescente per $x < 0 \quad or \quad x > 4$ e decrescente per $0 < x < 4$. Quindi, per ogni valori di k, f ha un massimo relativo in x=0 ed un minimo relativo in x=4.
Se x=0, y=k e se x=4, x=-32+k: massimo $M = (0; k)$, minimo $m = 4; k - 32)$.

2)

Per quali valori di k, f ha tre zeri reali distinti?

Siccome la funzione per x che tende a meno infinito tende a meno infinito e per x che tende a più infinito tende a più infinito, per avere tre zeri distinti il massimo deve avere ordinata positiva ed il minimo ordinata negativa, quindi:

$$\begin{cases} k > 0 \\ k - 32 < 0 \end{cases} \quad : \quad 0 < k < 32 \, .$$

3)

Si trovi il valore di k tale che il valor medio di f nell’intervallo chiuso [-1; 2] sia 1.

Deve essere:

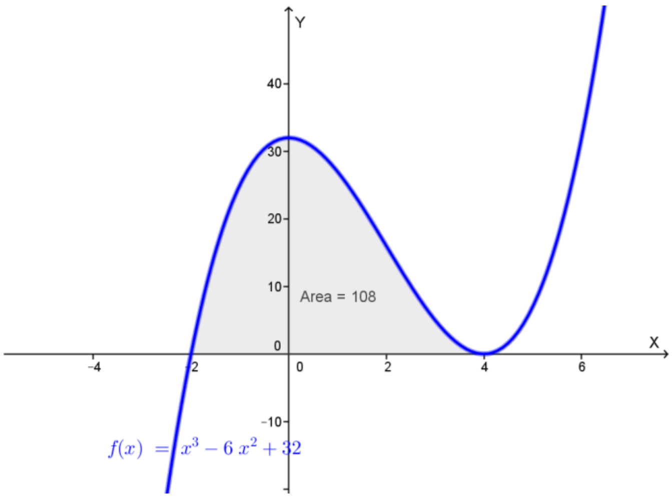
$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3} \cdot \int_{-1}^{2} (x^3 - 6x^2 + k)dx = 1 \, , \quad \int_{-1}^{2} (x^3 - 6x^2 + k)dx = 3$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + kx\right]_{-1}^{2} = 4 - 16 + 2k - \left(\frac{1}{4} + 2 - k\right) = 3: \;\; k = \frac{23}{4}$$

4)

Si determini l'area della regione finita delimitata dal grafico di f e dall'asse x quando k=32.

Per k=32 la funzione ha equazione: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$ ed ha quindi massimo $M = (0; 32)$, minimo $m = (4; 0)$. La regione richiesta è quindi la seguente:



Cerchiamo le intersezioni con l'asse x. Una è x=4 (il minimo), l'altra si ottiene abbassando di grado l'equazione $x^3 - 6x^2 + 32 = 0$ con la regola di Ruffini: x=-2.
L'area richiesta è quindi data da:

$$Area = \int_{-2}^{4} (x^3 - 6x^2 + 32)\, dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 32x\right]_{-2}^{4} = 64 - (-44) = 108\, u^2 = Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria