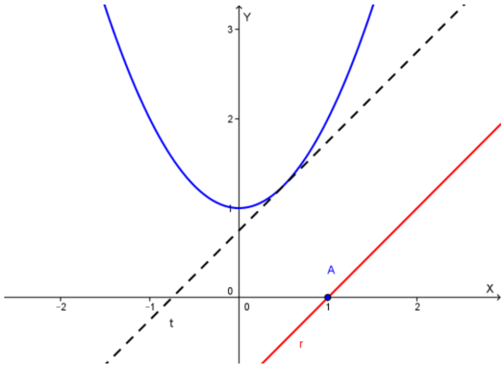
Scuole italiane all'estero (Europa) 2005 – PROBLEMA 2

Siano date la parabola λ e la retta r d'equazioni rispettive $y = x^2 + 1$ e $y = x - 1$.

1)

Quale è la distanza minima tra λ e r ? E quale ne è il valore?

Rappresentiamo graficamente le due curve insieme alla tangente t alla parabola parallela ad r:



La minima distanza d tra la retta e la parabola è data dalla distanza fra le due rette r e t. L'equazione di t è del tipo: $y = x + k$ e risulta tangente alla parabola se ha con essa due intersezioni coincidenti:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + k \end{cases}, \quad x^2 + 1 = x + k \;, \;\; x^2 - x + 1 - k = 0, \;\; \Delta = 1 - 4 + 4k = 0 \;\; se\; k = \frac{3}{4}$$

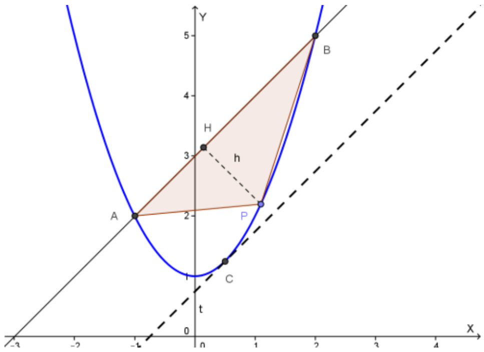
La retta t ha quindi equazione: $y = x + \frac{3}{4}$, $4x - 4y + 3 = 0$. Per trovare la d distanza fra r e t cerchiamo la distanza di un punto di r e t, per esempio (1; 0). Si ha:

$$d\colon \left|\frac{4 - 0 + 3}{\sqrt{16 + 16}}\right| = \frac{7}{\sqrt{32}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

2)

Siano A e B i punti d'intersezione di λ con la retta s d'equazione $y = x + 3$*, si determini il punto P appartenente all'arco AB tale che il triangolo ABP abbia area massima*

Cerchiamo i punti A e B: $x^2 + 1 = x + 3$, $x^2 - x - 2 = 0 :$ $x = 2$ e $x = -1$. Quindi: $A = (-1; 2)$ e $B = (2; 5)$. Si ha la seguente situazione grafica:



Il triangolo ABP di area massima si ottiene quando la distanza h di P dalla retta AB è massima. Il punto P è quindi il punto di tangenza fra la parabola e la retta parallela ad AB tangente ad AB. Tale retta è quella trovata precedentemente, poiché AB ha coefficiente angolare 1 come r, quindi la sua equazione è: $y = x + \frac{3}{4}$. Il punto P richiesto si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + \frac{3}{4} \end{cases} , \quad x^2 + 1 = x + \frac{3}{4} \; , \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0, \;\; x = \frac{1}{2} \;\; e \;\; y = \frac{5}{4}$$

Il punto P richiesto ha coordinate: $P = \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$.

3)

Si determini l'area del segmento parabolico di base AB e si verifichi che essa è $\frac{4}{3}$ dell'area del triangolo ABP.

Per il Teorema di Archimede l'area del segmento parabolico richiesto è dato da:

$Area = \frac{2}{3} AB \cdot h$, dove h è l'altezza del rettangolo di base AB circoscritto al segmento parabolico. Per trovare h basta quindi calcolare la distanza del punto di tangenza P precedentemente trovato dalla retta AB, con $A = (-1; 2) \; e \; B = (2; 5)$.
Retta AB: $y - 2 = 1(x + 1), \;\; x - y + 3 = 0$. Quindi:

$$h = distanza \; di \; P \; da \; AB = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{5}{4} + 3\right|}{\sqrt{2}} = \frac{9}{4\sqrt{2}}; \qquad AB = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

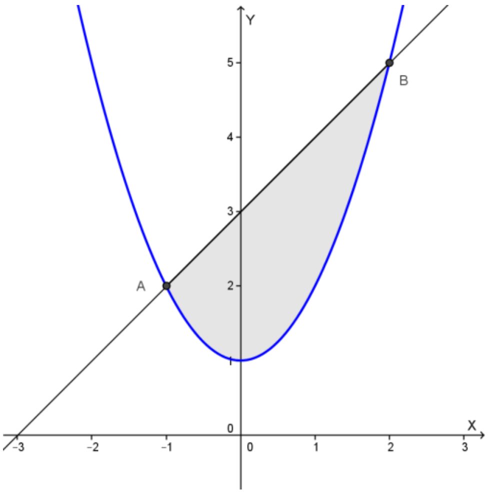
$$Area(segmento \; parabolico) = \frac{2}{3} AB \cdot h = \frac{2}{3}(3\sqrt{2})\left(\frac{9}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{9}{2}$$

$Area(triangolo \; ABP) = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} Area(segmento \; parabolico)\right)$ quindi:

$$Area(segmento \; parabolico) = \frac{4}{3} Area(triangolo \; ABP).$$

4)

Si determini il volume del solido generato dalla rotazione completa del segmento parabolico di base AB attorno all'asse x.



Retta AB: $y = x + 3$; parabola: $y = x^2 + 1$. Il volume richiesto è dato da:

$$V = \pi \int_{-1}^{2} [(x+3)^2 - (x^2+1)^2]dx = \pi \int_{-1}^{2} [8 + 6x - x^2 - x^4]dx =$$

$$= \pi \left[8x + 3x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{2} = \pi \left[16 + 12 - \frac{8}{3} - \frac{32}{5} - \left(-8 + 3 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\right] = \frac{117}{5}\pi = V$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria