Scuole italiane all'estero (Europa) 2005 – Quesiti

QUESITO 1

Indicata con S_n la somma di n termini in progressione geometrica di primo termine 1/2 e ragione 1/2 si calcoli il

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$$

Ricordiamo che la somma dei primi n termini di una progressione geometrica con primo termine a_1 e ragione q è data da:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Nel nostro caso:

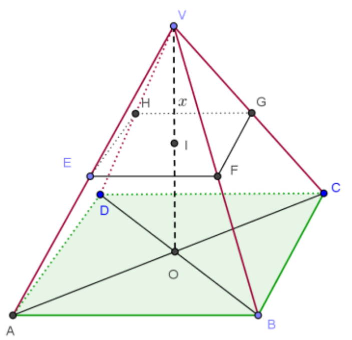
$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} = 0$$

QUESITO 2

Una piramide ha la base quadrata e l'altezza uguale a 8 cm. Quanti piani paralleli alla base dividono la piramide in due parti i cui volumi sono nel rapporto 7:1? Quali sono le distanze di tali piani dal vertice della piramide?



Indicata con x la distanza dal vertice della piramide del piano parallelo alla base, per una nota proprietà delle piramidi si ha:

$$Area(ABCD): Area(EFGH) = 8^2 : x^2, \quad Area(EFGH) = \frac{x^2 \cdot Area(ABCD)}{64}$$

Detto V_1 il volume della piramide di base EFGH e vertice V e V_2 il volume della piramide di base ABCD e vertice V, deve essere:

$$V_1 = \frac{1}{8} V_2 \quad oppure \quad V_1 = \frac{7}{8} V_2$$

Nel primo caso si ha:

$V_1 = \frac{1}{3} Area(EFGH) \cdot x = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} Area(ABCD) \cdot 8\right)$ da cui: $\frac{x^2 \cdot Area(ABCD)}{64} \cdot x = Area(ABCD)$,

$$x^3 = 64 : \quad x = 4\ cm$$

Nel secondo caso si ha:

$V_1 = \frac{1}{3} Area(EFGH) \cdot x = \frac{7}{8}\left(\frac{1}{3} Area(ABCD) \cdot 8\right)$ da cui: $\frac{x^2 \cdot Area(ABCD)}{64} \cdot x = 7 \cdot Area(ABCD)$,

$$x^3 = 448 : \quad x = \sqrt[3]{448} = 4\sqrt[3]{7}$$

QUESITO 3

Un recipiente contiene 1000 litri di liquido. Se è un parallelepipedo a base quadrata, quali ne sono le dimensioni minime?

Siccome 1000 litri equivalgono a 1000 decimetri cubi, cioè 1 metro cubo, il problema consiste nella ricerca del parallelepipedo a base quadrata di dato volume (1 metro cubo) che ha dimensioni minime.

Indicati con l lo spigolo di base e con h l'altezza, risulta: $V = l^2 h = 1$. Quindi: $h = \frac{1}{l^2}$.

Ipotizziamo che per dimensioni minime si intenda la superficie minima. Si ha:

$$S = 2l^2 + 4lh = 2l^2 + \frac{4}{l} \quad ; \quad S' = 4l - \frac{4}{l^2} \geq 0 \quad se \quad l^3 \geq 1$$

La superficie quindi cresce se $l > 1$ e decresce se $0 < l < 1$; per $l = 1$ la superficie è quindi mima:

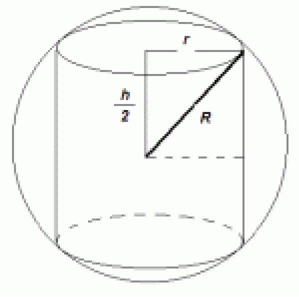
il recipiente di minima superficie è il cubo di spigolo $1\ metro$. La superficie minima è uguale a $6\ m^2$.

QUESITO 4

Quale è il cilindro di volume massimo inscrivibile in una sfera assegnata?

Indichiamo con R il raggio della sfera, con r il raggio del cilindro e con h l'altezza del cilindro.

Il volume del cilindro è dato da: $V(cilindro) = \pi r^2 h$.



Risulta:

$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ quindi: $V(cilindro) = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = f(h)\,,\ con\ 0 \le h \le 2R$

Tale volume è massimo se lo è $y = \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$; calcoliamo la derivata prima:

$$y' = R^2 - \frac{h^2}{4} + h\left(-\frac{1}{2}h\right) = -\frac{3}{4}h^2 + R^2 \ge 0\ \ se\ \ h^2 \le \frac{4}{3}R^2\ \ ,\ -R\sqrt{\frac{4}{3}} \le h \le R\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Quindi, con le limitazioni su h, la funzione è crescente se $0 < h < R\sqrt{\frac{4}{3}}$ e decrescente se $R\sqrt{\frac{4}{3}} < h < 2R$: la funzione ha quindi un massimo (assoluto) per $h = R\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$.
Per tale valore di h si ha: $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} = R^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}R^2 = \frac{2R^2}{3}$, $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$

Il cilindro di volume massimo inscritto in una sfera di raggio R è quello di altezza $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$ e raggio di base $\frac{R\sqrt{6}}{3}$.

QUESITO 5

Quando una funzione f è invertibile? Come si calcola la derivata della funzione f^{-1}? Fai un esempio.

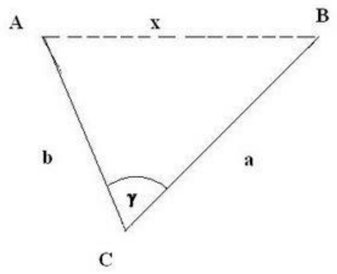
Data una funzione $f: A \to B$, essa si dice invertibile se esiste una corrispondenza biunivoca fra dominio e codominio; la funzione $f^{-1}: B \to A$, che ha come dominio il codominio di e f e come codominio il dominio di f, si dice funzione inversa di f.
Una funzione strettamente monotona in un intervallo è invertibile (non è detto il viceversa).
Posto $y = f(x)$, la sua funzione inversa è $x = f^{-1}(y) = g(y)$. Se f è derivabile in un punto x_0 con derivata non nulla, detto $y_0 = f(x_0)$ si ha: $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
Esempio: $y = f(x) = e^x,\ x = f^{-1}(y) = g(y) = \ln(y)\,,\ x_0 = 0,\ f'(x) = e^x;$

$$f'(x_0) = f'(0) = 1;\ \ y_0 = f(0) = 1\ ;\ \ g'(y) = \frac{1}{y}\ ,\ \ g'(y_0) = \frac{1}{1} = 1 = \frac{1}{f'(x_0)}$$

QUESITO 6

Spiegare come utilizzare il teorema di Carnot per trovare la distanza tra due punti accessibili ma separati da un ostacolo.

Siano A e B i due punti (entrambi accessibili) separati da un ed indichiamo con x la loro distanza.



Fissiamo un punto C (accessibile) di cui è possibile misurare la distanza b da A ed a da B. Da C inquadriamo A e B (per esempio con un teodolite) e misuriamo l'angolo $A\hat{B}C = \gamma$
Per trovare x possiamo perciò applicare il teorema del coseno (detto di Carnot):

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\gamma)$$

Ed estraendo la radice quadrata: $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abcos(\gamma)}$.

QUESITO 7

Trovare il periodo della funzione : $y = sen\frac{2}{3}x + sen\frac{1}{4}x.$

La funzione $y = sen\frac{2}{3}x$ ha periodo $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$; a funzione $y = sen\frac{1}{4}x$ ha periodo $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$. La funzione data ha periodo $T = m.c.m.(T_1, T_2) = m.c.m.(3\pi, 8\pi) = 24\pi.$

QUESITO 8

Dimostrate che la somma di qualsiasi numero reale positivo e del suo reciproco è almeno 2.

Indicato con x un numero reale positivo, detto 1/x il suo reciproco deve essere:

$$s = x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0\,, \quad \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0\,, \quad (x-1)^2 \geq 0 : \quad per\ ogni\ \ x.$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria