Scuole italiane all'estero - Bilingue italo-albanesi 2005

1)

Studiare e rappresentare graficamente in un piano cartesiano ortogonale XOY la funzione $F(x)=\frac{x^2+1}{4-x^2}$. *Verificare che le tangenti alla funzione nei punti A e B di ascissa* $x=1$ *e* $x=-1$, *si incontrano in un punto dell'asse delle ordinate.*

$$y=F(x)=\frac{x^2+1}{4-x^2}$$

Dominio: $x\neq\pm 2;\ \ -\infty<x<-2, -2<x<2,\ 2<x<+\infty$

La funzione è pari (grafico simmetrico rispetto all'asse y); infatti $F(-x)=F(x)$.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

$se\ x=0\,,\ y=\frac{1}{4}\ \ ;\quad se\ \ y=0{:}\,x^2+1=0\ \ mai.$

Segno della funzione:

$$F(x)>0\ \ se\ \ \frac{x^2+1}{4-x^2}>0,\qquad cioè\ \ 4-x^2>0{:}\ -2<x<2$$

Limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{4-x^2}=-1{:}\ \ y=-1\ asintoto\ orizzontale\ per\ \ \ x\to\pm\infty$$

$$\lim_{x\to(-2)^{\mp}}\frac{x^2+1}{4-x^2}=\mp\infty\,,\quad \lim_{x\to 2^{\mp}}\frac{x^2+1}{4-x^2}=\pm\infty\ :\quad x=\pm 2\ asintoti\ verticali$$

Non esistono asintoti obliqui.

Studio derivata prima:

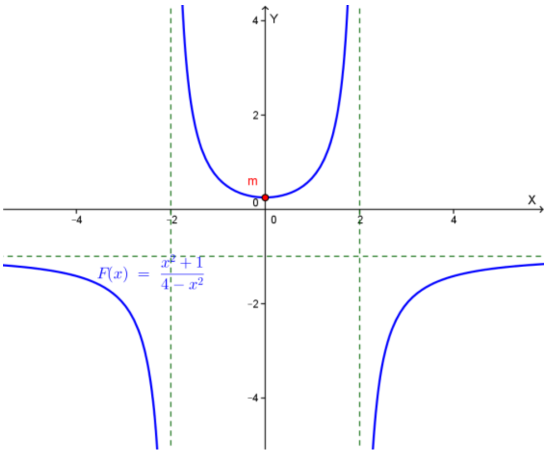
$$F'(x)=\frac{2x(4-x^2)-(x^2+1)(-2x)}{(4-x^2)^2}=\frac{2x(4-x^2+x^2+1)}{(4-x^2)^2}=\frac{10x}{(4-x^2)^2}\geq 0\ \ se\ x\geq 0$$

La funzione è decrescente se $-\infty<x<-2, -2<x<0$ e crescente se $0<x<2,\ \ 2<x<+\infty$; x=0 è punto di minimo relativo.

Studio della derivata seconda:

$F''(x) = 10\dfrac{(4-x^2)^2 - x[2(4-x^2)(-2x)]}{(4-x^2)^4} \geq 0 \quad se\ (4-x^2)^2 - x[2(4-x^2)(-2x)] \geq 0,$
$(4-x^2)[(4-x^2)+4x^2] \geq 0, \quad (4-x^2) \geq 0:\ -2 < x < 2$: il grafico volge la concavità verso l'alto in tale intervallo e verso il basso nella parte rimanente del dominio; non ci sono flessi.

Grafico di F:

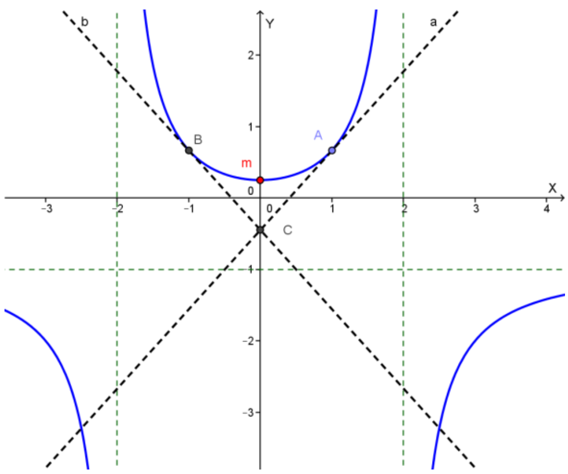


Se $x = \pm 1$ otteniamo $y = \frac{2}{3}$, quindi: $A = \left(1; \frac{2}{3}\right)$ e $B = \left(-1; \frac{2}{3}\right)$. Risulta:

$F'(-1) = -\frac{10}{9} \quad ed \quad F'(1) = \frac{10}{9}$. Quindi:

tangente in A: $y - \frac{2}{3} = \frac{10}{9}(x-1),\ y = \frac{10}{9}x - \frac{4}{9}$
tangente in B: $y - \frac{2}{3} = -\frac{10}{9}(x+1),\ y = -\frac{10}{9}x - \frac{4}{9}$

Le due tangenti si intersecano nel punto dell'asse delle ordinate con $y = -\frac{4}{9}$.

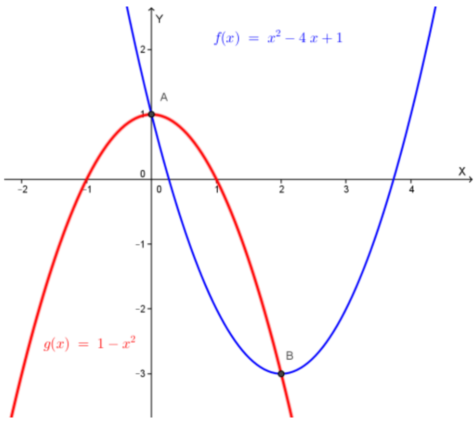


2)

Studiare e rappresentare graficamente in un piano cartesiano ortogonale XOY le due parabole di equazioni $y = x^2 - 4x + 1$ *e* $y = 1 - x^2$*. Determinare quindi i punti comuni tra le due parabole e trovare l'area della parte finita di piano compresa tra le due funzioni.*

La parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 1$ ha vertice $V_1 = (2;\ -3)$, taglia l'asse y nel punto di ordinata 1 e l'asse x nei punti di ascissa $x = 2 \pm \sqrt{3}$.

La parabola di equazione $y = 1 - x^2$ ha vertice $V_2 = (1;\ 0)$, taglia l'asse y nel punto di ordinata 1 e l'asse x nei punti di ascissa $x = \pm 1$.



Le intersezioni fra le due parabole si ottengono risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 1 \\ y = 1 - x^2 \end{cases} ;\ x^2 - 4x + 1 = 1 - x^2 ,\ \ 2x^2 - 4x = 0 : x = 0\ e\ x = 2$$

Le due parabole si intersecano nei punti $A = (0; 1)\ e\ B = (2;\ -3)$.

L'area richiesta si ottiene calcolando il seguente integrale:

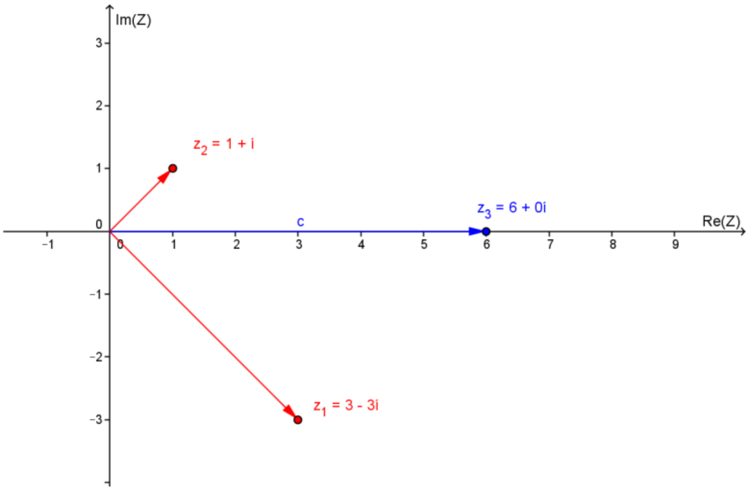
$$Area = \int_0^2 \left(1 - x^2 - (x^2 - 4x + 1)\right) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\, dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 =$$

$$= -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}\ u^2 \cong 2.67\ u^2 = Area.$$

3)

Dati i due numeri complessi $z_1 = 3 - 3i$ *e* $z_2 = 1 + i$ *, calcola il prodotto* $z_1 \cdot z_2$*. Rappresenta nel piano di Gauss il numero complesso così ottenuto e determinane modulo e argomento.*

Risulta: $z_3 = z_1 \cdot z_2 = (3 - 3i\ )(1 + i\ ) = 6;\ |z_1 \cdot z_2| = 6,\ \ \arg(z_1 \cdot z_2) = 0$



4)

Risolvere con il metodo di Cramer il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 6y - 3z = -2 \\ -3x - z = 0 \\ x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

Siano $\Delta, \Delta_x, \Delta_y\ e\ \Delta_z$ rispettivamente il determinante della matrice dei coefficienti, il determinante della matrice che si ottiene da quella dei coefficienti sostituendo la colonna dei coefficienti della x con la colonna dei termini noti, il determinante della matrice che si ottiene da quella dei coefficienti sostituendo la colonna dei coefficienti della y con la colonna dei termini noti ed il determinante della matrice che si ottiene da quella dei coefficienti sostituendo la colonna dei coefficienti della z con la colonna dei termini noti.

Calcoliamo i determinanti mediante il teorema di Laplace utilizzando la prima riga:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3(-3) + 6(-5) - 3(9) = -66$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -2(-3) + 6(4) - 3(0) = 30$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3(4) + 2(-5) - 3(-12) = 38$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 3(0) + 6(-12) - 2(9) = -90$$

La soluzione del sistema (unica) è quindi:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{30}{-66} = -\frac{5}{11} \ , \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{38}{-66} = -\frac{19}{33} \ , \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-90}{-66} = \frac{15}{11}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria