Scuole italiane all'estero - Bilingue italo-slovacca 2005

1)

E' data l'equazione $y = -ax^2 + bx + c$ *dove i coefficienti a, b, c sono numeri reali non negativi. Determinare tali coefficienti sapendo che la parabola p, che rappresenta l'equazione in un piano cartesiano ortogonale (Oxy), interseca l'asse x nei punti O, A ed ha il vertice nel punto V in modo che*

a) *il triangolo OAV sia rettangolo*

b) *il segmento parabolico individuato dalla corda OA genera un solido di volume* $\frac{128}{15}\pi$ *quando ruota di un giro completo attorno all'asse x .*

Considerata poi la circonferenza tangente in A alla retta AV e passante per O, calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui essa divide il segmento parabolico suddetto.

Siccome la parabola passa per l'origine risulta c=0.

Posto $A = (2t, 0)$, deve essere $-a(4t^2) + b(2t) = 0, da\ cui, oltre\ a\ t = 0, t = \frac{b}{2a}$.

L'ascissa del vertice e $x_V = t$ e la sua ordinata è:

$$y_V = y(t) = -at^2 + bt = -a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + b\left(\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2}{4a} + \frac{b^2}{2a} = \frac{b^2}{4a}:\ V = \left(\frac{b}{2a}; \frac{b^2}{4a}\right)$$

Le rette OV e VA devono essere perpendicolari, quindi:

$$m_{OV} = \frac{\frac{b^2}{4a}}{\frac{b}{2a}} = \frac{b^2}{4a} \cdot \frac{2a}{b} = \frac{b}{2}\ ,\quad m_{AV} = \frac{\frac{b^2}{4a} - 0}{\frac{b}{2a} - 2t} = \frac{\frac{b^2}{4a}}{\frac{b}{2a} - 2\left(\frac{b}{2a}\right)} = \frac{\frac{b^2}{4a}}{-\left(\frac{b}{2a}\right)} = -\frac{b}{2}$$

Deve quindi essere: $m_{OV} \cdot m_{AV} = -1,\ \ \frac{b}{2} \cdot \left(-\frac{b}{2}\right) = -1,\ \ b^2 = 4, b = 2\ \ (essendo\ b \geq 0)$.

La parabola è quindi del tipo:

$y = -ax^2 + 2x$, con a>0; il vertice è nel primo quadrante e la parabola ha la concavità rivolta verso il basso. L'ipotesi sul volume porta alla seguente condizione:

$\pi \int_0^{2t} (-ax^2 + 2x)^2\, dx = \pi \int_0^{\frac{b}{a}} (-ax^2 + 2x)^2\, dx = \pi \int_0^{\frac{2}{a}} (-ax^2 + 2x)^2\, dx = \frac{128}{15}\pi$, quindi:

$$\int_0^{\frac{2}{a}} (-ax^2 + 2x)^2\, dx = \frac{128}{15};\ \ \int_0^{\frac{2}{a}} (a^2x^4 - 4ax^3 + 4x^2)\, dx = \left[\frac{1}{5}a^2x^5 - ax^4 + \frac{4}{3}x^3\right]_0^{\frac{2}{a}} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{32}{a^3} - \frac{16}{a^3} + \frac{4}{3}\left(\frac{8}{a^3}\right) = \frac{128}{15}\ \ se\ \ \frac{2}{5a^3} - \frac{1}{a^3} + \frac{2}{3a^3} = \frac{8}{15}\ \ se\ \ 6 - 15 + 10 = 8a^3 : a = \frac{1}{2}$$

La parabola p ha quindi equazione: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

A=(4; 0), V=(2; 2).

La retta AV ha equazione: $y = -(x-4)$

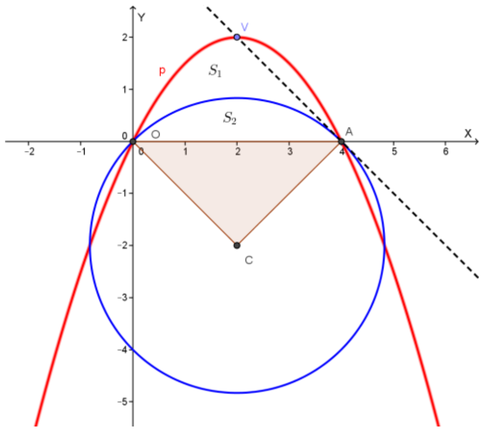
Il centro della circonferenza appartiene alla perpendicolare in A alla retta AV ed all'asse della corda AV.

Perpendicolare in A ad AV: $y = (x-4)$

Asse di AV: $x = 2$

Centro circonferenza: $C = (2;\ -2)$; raggio: $r^2 = OC^2 = 8$

Equazione circonferenza: $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8,\ \ x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$



Area segmento parabolico OAV: $\frac{2}{3}(4)(2) = \frac{16}{3}\quad (teorema\ Archimede)$

Area triangolo AOC: $\frac{1}{2}(4)(2) = 4$

Area settore circolare OCAV: osserviamo che $m_{OC} = -1$, quindi $C\hat{O}A$ è $retto$; perciò l'area del settore circolare è un quarto dell'area del cerchio: $\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi(8) = 2\pi$

Area segmento circolare di base OA interno al segmento parabolico:

$$S_2 = (2\pi - 4)\ u^2$$

La parte rimanente del segmento parabolico ha quindi area:

$$S_1 = \frac{16}{3} - (2\pi - 4) = \left(\frac{28}{3} - 2\pi\right)\ u^2$$

2)

Data la curva $y = \frac{4x^2+1}{3x}$ *, se ne rappresenti il grafico .*
Preso un punto P sull'arco di curva del primo quadrante, si conducano per esso le parallele agli asintoti che incontrano gli stessi nei punti A e B rispettivamente.
Determinare la posizione del punto P per cui è minima la somma dei segmenti PA e PB .

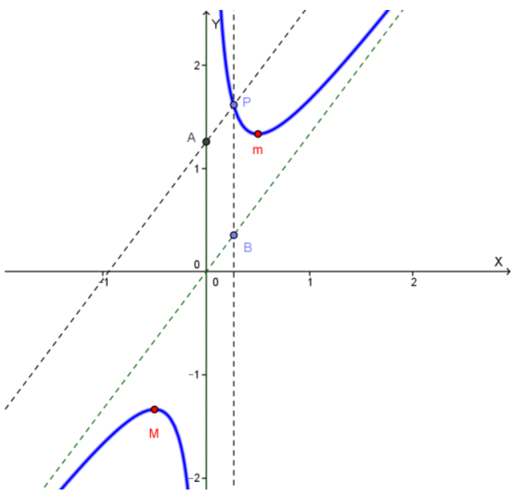
La curva può essere scritta nella forma: $4x^2 - 3xy + 1 = 0$ quindi è una conica. In particolare, avendo l'asintoto x=0, è un'iperbole. È quindi sufficiente trovare l'asintoto obliquo ed i vertici (punti in cui si annulla la derivata prima).

Per l'asintoto obliquo osserviamo che la curva può anche essere scritta nella forma:

$y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3x}$, quindi l'asintoto obliquo ha equazione ha equazione $y = \frac{4}{3}x$ (ricordiamo che condizione necessaria e sufficiente affinché la funzione y=f(x) abbia l'asintoto obliquo y=mx+q è che si possa scrivere nella forma f(x)=mx+q+g(x), con g(x) infinitesimo per x che tende all'infinito; per la dimostrazione di questa proprietà si veda la pagina: http://www.matefilia.it/argomen/asintoti/asintoti.htm

Calcoliamo la derivata prima:

$f'(x) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3x^2} = 0 \ \ se \ \ x = \pm\frac{1}{2}; in\ tali\ punti\ abbiamo\ i\ vertici\ dell'iperbole$, che sono minimo e massimo relativi per la funzione (con ordinata rispettivamente 4/3 e -4/3).



Consideriamo ora il punto P della curva appartenente al primo quadrante, che ha coordinate del tipo: $P = \left(t;\ \frac{4t^2+1}{3t}\right)$, con t>0. Le rette per P parallele agli asintoti hanno equazioni: $x = t$ (la parallela all'asintoto verticale), da cui il punto $B = \left(t; \frac{4}{3}t\right)$. La parallela per P all'asintoto obliquo ha equazione: $\frac{4t^2+1}{3t} = \frac{4}{3}(x - t)$ ed intersecando con l'asintoto verticale x=0 abbiamo: $y - \frac{4t^2+1}{3t} = -\frac{4}{3}t$, $y = \frac{1}{3t}$, quindi $A = \left(0; \frac{1}{3t}\right)$.

Calcoliamo la misura dei segmenti PA e PB:

$$PA = \sqrt{t^2 + \left(\frac{4t^2+1}{3t} - \frac{1}{3t}\right)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{16}{9}t^2} = \frac{5}{3}t$$

$$PB = y_P - y_B = \frac{4t^2+1}{3t} - \frac{4}{3}t = \frac{1}{3t}$$

Dobbiamo quindi rendere minima (per t>0) la seguente funzione:

$$s = PA + PB = \frac{5}{3}t + \frac{1}{3t}$$

Risoluzione elementare:

Osserviamo che s è la somma di due quantità a prodotto costante: $\left(\frac{5}{3}t\right)\left(\frac{1}{3t}\right) = 5$ quindi s è minima quando le due quantità sono uguali, cioè quando:

$$\frac{5}{3}t = \frac{1}{3t},\ \ da\ cui: 5t^2 = 1, \qquad t = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}; \quad P = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$$

Risoluzione mediante l'uso delle derivate:

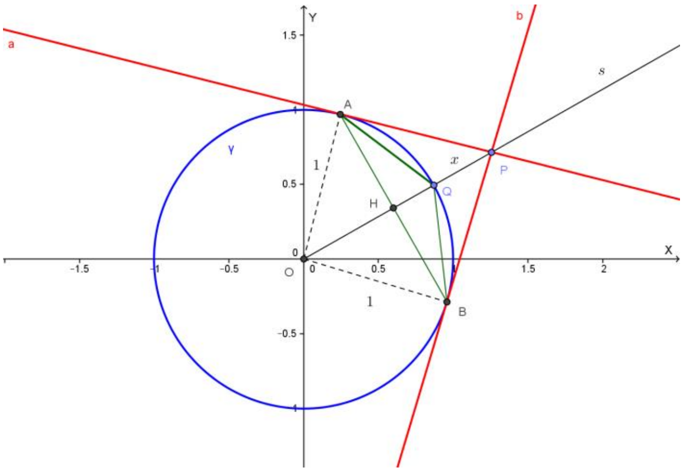
$$s' = \frac{5}{3} - \frac{1}{3t^2} \geq 0\ \ se\ \ t^2 \geq \frac{1}{5}:\ t \leq -\frac{\sqrt{5}}{5}\ \ vel\ \ t \geq \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Quindi s è decrescente per $0 < t < \frac{\sqrt{5}}{5}$ e crescente per $t > \frac{\sqrt{5}}{5}$.

La somma dei segmenti PA e PB è minima per $t = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ed il punto P che realizza il minimo ha coordinate $P = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

3)

Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O, tracciare una semiretta s uscente da O ed intersecante γ in un punto Q . Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza, tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ, trovare il limite per x tendente all'infinito del rapporto $k = \frac{AQ+QB}{AB}$.
Studiare quindi la funzione $y = f(x)$ dove $f(x) = k^2$ e calcolare la superficie della regione di piano delimitata dalla curva e dagli assi cartesiani .



Risulta $x > 0$. Essendo il triangolo OAP rettangolo in A:
$AP^2 = OP^2 - OA^2 = (1+x)^2 - 1 = 2x + x^2$.

Per il promo teorema di Euclide si ha: $OA^2 = OP \cdot OH,\ da\ cui$: $OH = \frac{OA^2}{OP} = \frac{1}{1+x}$, quindi:

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{1+x}, \qquad AB = 2AH = \frac{2\sqrt{x^2+2x}}{1+x}$$

Osserviamo che AQ=BQ (Q appartiene ad OP che è asse di AB) e risulta:

$$AQ = \sqrt{AH^2 + HQ^2} = \sqrt{\frac{x^2+2x}{(1+x)^2} + (1-OH)^2} = \sqrt{\frac{x^2+2x}{(1+x)^2} + \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+2x}{(1+x)^2} + \frac{x^2}{(1+x)^2}} = \sqrt{\frac{2x(x+1)}{(1+x)^2}} = \sqrt{\frac{2x}{1+x}} = AQ = BQ$$

Si ha pertanto:

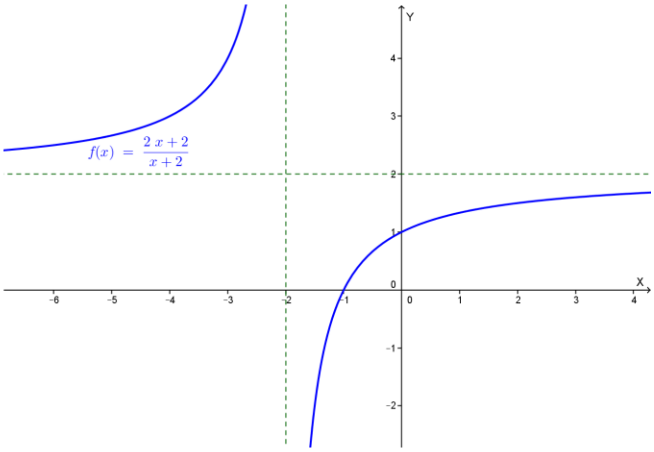
$$k=\frac{AQ+QB}{AB}=\frac{2\sqrt{\frac{2x}{1+x}}}{\frac{2\sqrt{x^2+2x}}{1+x}}=\sqrt{\frac{2x}{1+x}\cdot\frac{(1+x)^2}{x^2+2x}}=\sqrt{\frac{2(1+x)}{x+2}}$$

Perciò:

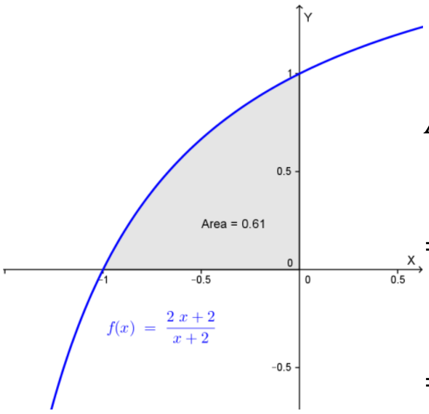
$$\lim_{x\to\infty} k=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2(1+x)}{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{2x}{x}}=\sqrt{2}$$

Studiamo ora la funzione $y=f(x)=k^2=\frac{2x+2}{x+2}$.

Si tratta di una funzione omografica con centro in $(-2;2)$, asintoti $x=-2\ e\ y=2$, che con x=0 vale 1 e con y=0 vale -1; il suo grafico (prescindendo dai limiti geometrici sulla x) è quindi il seguente:



La regione richiesta è indicata nella seguente figura:



L'area è data dal seguente integrale:

$$Area=\int_{-1}^{0}\frac{2x+2}{x+2}dx=2\int_{-1}^{0}\frac{x+1}{x+2}dx=2\int_{-1}^{0}\frac{x+2-1}{x+2}dx=$$

$$=2\int_{-1}^{0}\frac{x+2}{x+2}dx+2\int_{-1}^{0}\frac{-1}{x+2}dx=2\int_{-1}^{0}dx-2[\ln|x+2|]_{-1}^{0}=$$

$$=2[x]_{-1}^{0}-2(ln2)=(2-2ln2)\ u^2\cong 0.61\ u^2=Area$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria