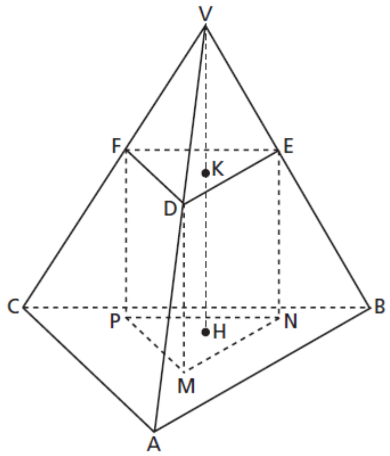
ORDINAMENTO 2005 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.



A)

Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Indicata con h l'altezza della piramide e con S l'area della base ABC risulta:

$$Volume(piramide) = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$

Risulta poi: $VK = HK = h/2$. Inoltre le aree dei triangoli ABC e DEF (che appartengono a piani paralleli) sono direttamente proporzionali ai quadrati delle distanze dei loro piani dal vertice V; cioè:

$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{VH^2}{VK^2} = \frac{h^2}{h^2/4} = 4 \quad \Longrightarrow \quad A(DEF) = \frac{1}{4}A(ABC) = \frac{1}{4}S$$

Quindi:

$$Volume(prisma) = A(DEF) \cdot HK = \frac{1}{4}S \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8} \cdot S \cdot h = \frac{3}{8} \cdot V(piramide)$$

B)

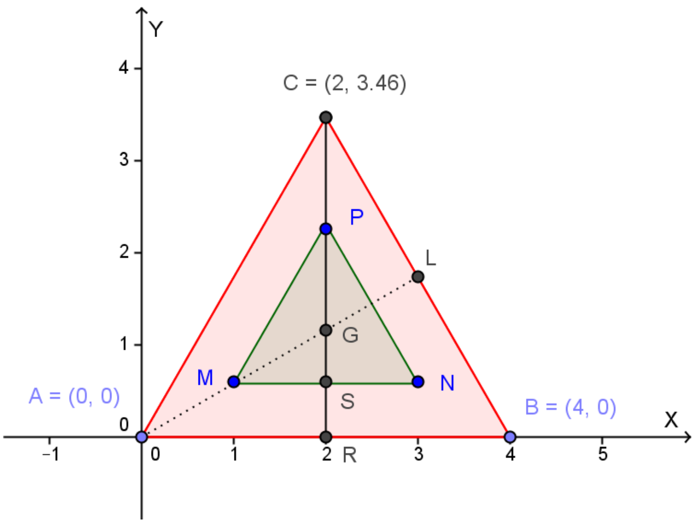
Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:

1. *calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;*
2. *supposto che gli spigoli AB ed MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC ed MNP ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;*
3. *determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;*
4. *calcolare le aree delle parti in cui la parabola trovata divide i triangoli ABC ed MNP;*
5. *spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.*

$\mathbf{B_1}$)

Siccome il triangolo MNP è congruente al triangolo DEF e quest'ultimo, come visto nel punto precedente, è simile al triangolo ABC; essendo AH il doppio di HK, il rapporto di similitudine fra ABC ed MNP è 2, ciò vuol dire che il lato del triangolo MNP è la metà del lato del triangolo ABC: lo spigolo della base MNP del prisma misura quindi 2 cm.

$\mathbf{B_2}$)



L'altezza CR del triangolo ABC vale: $CR = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ segue che:

$A = (0; 0), \quad B = (4; 0), \quad C = \left(2; 2\sqrt{3}\right)$.

I due triangoli hanno lo stesso baricentro G (che è anche ortocentro, incentro e circocentro); per una nota proprietà del baricentro risulta $CG = 2GR$, quindi:
$GR = \frac{1}{3}CR = \frac{2}{3}\sqrt{3}$; siccome i due triangoli sono simili, con rapporto di similitudine pari a 2,

risulta $AG = 2MG$ e $GR = 2GS$ $da\ cui$ $GS = SR = \frac{1}{2}GR = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; pertanto:

$M = \left(1;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $N = \left(3;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Inoltre risulta: $PG = 2GS = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ $da\ cui$ $PR = PG + GR = 2GS + 2GS = 4GS = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

Possiamo così trovare le coordinate di P: $P = \left(2;\ \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$.

$\mathbf{B_3}$)

La parabola richiesta ha equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$, ha per asse la retta di equazione $x = 2$ e passa per $A = (0;0)$, $B = (4;0)$, $M = \left(1;\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Passaggio per A: $c = 0$;

asse x=2: $-\frac{b}{2a} = 2$ $da\ cui$ $b = -4a$

passaggio per M: $\frac{\sqrt{3}}{3} = a + b + c$

Quindi:

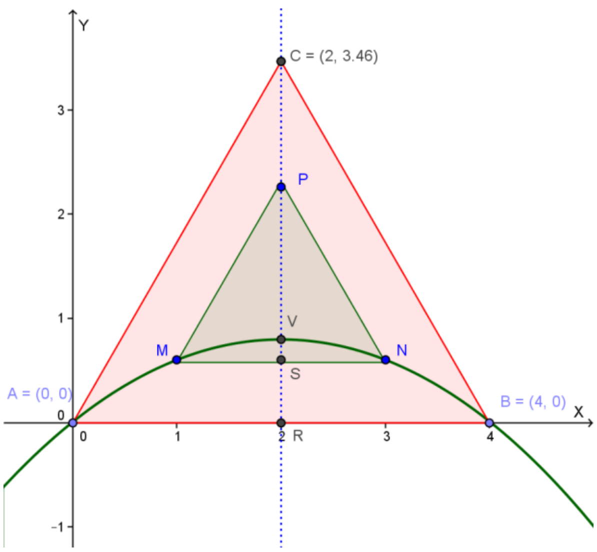
$$\begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ a + b + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ -3a = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ a = -\frac{\sqrt{3}}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ b = \frac{4}{9}\sqrt{3} \\ a = -\frac{\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

La parabola ha quindi equazione:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{9}x^2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{9}(x^2 - 4x)$$

Essendo N simmetrico di M rispetto all'asse della parabola, la parabola passerà anche per N; verifichiamolo analiticamente sostituendo le coordinate di N nell'equazione della parabola:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot 9 + \frac{4}{9}\sqrt{3}\cdot 3 = -\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\ .$$



$\mathbf{B_4)}$

Cerchiamo le coordinate del vertice della parabola: $x_V = 2, \quad y_V = \frac{4}{9}\sqrt{3}$

Calcoliamo l'area $S(AB)$ del segmento parabolico di base AB (utilizziamo il teorema di Archimede):

$$S(AB) = \frac{2}{3} \cdot AB \cdot VR = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{4}{9}\sqrt{3} = \frac{32}{27}\sqrt{3}$$

Calcoliamo l'area del triangolo (equilatero) ABC: $S(ABC) = AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

Il triangolo ABC viene diviso dalla parabola in due parti che hanno area:

$S_1 = S(AB) = \frac{32}{27}\sqrt{3}\ u^2$ ed $S_2 = S(ABC) - S_1 = 4\sqrt{3} - \frac{32}{27}\sqrt{3} = \frac{76\sqrt{3}}{27}\ u^2$

In modo analogo si procede per trovare le aree delle due parti in cui la parabola divide il triangolo MNP.

Calcoliamo l'area del segmento parabolico di base MN:

$$S(MN) = \frac{2}{3} \cdot MN \cdot VS = \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot (VR - SR) = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{9}\sqrt{3} = \frac{4}{27}\sqrt{3}$$

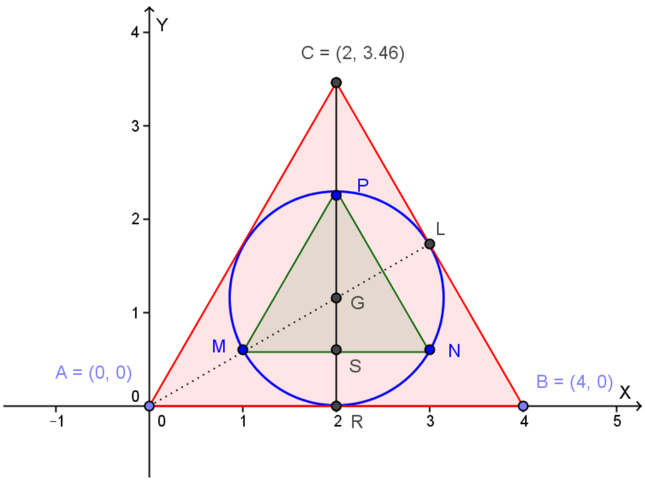
$$S(MNP) = \frac{1}{4}S(ABC) = \frac{1}{4} \cdot 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

Il triangolo MNP viene diviso dalla parabola in due parti che hanno area:

$S_3 = S(MN) = \frac{4}{27}\sqrt{3}\ u^2$ ed $S_4 = S(MNP) - S_3 = \sqrt{3} - \frac{4}{27}\sqrt{3} = \frac{23\sqrt{3}}{27}\ u^2$

$\mathbf{B_5)}$

Come abbiamo già notato, il triangolo (equilatero) MNP ed il triangolo (equilatero) ABC hanno lo stesso circocentro, quindi la circonferenza circoscritta ad MNP ha centro in G (v. figura del punto B_2) e raggio GM; ma GM=GR, quindi questa circonferenza è quella inscritta nel triangolo ABC.



Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri