ORDINAMENTO 2005 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$, *dove a è un parametro reale non nullo.*

1)

Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ *è limitata.*

Una funzione di equazione $y = f(x)$ si dice limitata se esistono due numeri reali A e B tali che: $A \leq f(x) \leq B\ ,\ \ \forall x\ appartenente\ al\ dominio\ della\ funzione$.

La funzione di equazione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$ è definita su tutto R; siccome $1 + x^2 \geq 1$ si ha che:

$\frac{1}{1+x^2} \leq 1$; pertanto:

$|f_a(x)| = \left|\frac{a}{1+x^2}\right| = |a| \cdot \frac{1}{1+x^2} \leq |a|$ e ciò equivale a dire $-|a| \leq f_a(x) \leq |a|$, quindi la funzione è limitata.

2)

Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) ed indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando a>0, scrivere l'equazione della circonferenza γ *di diametro OA.*

Studiamo la funzione $y = f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$ per a>0.

Si tratta di una funzione pari, definita per ogni x reale, positiva su tutto il dominio, che è massima quando $1 + x^2$ è minimo, cioè per x=0; il massimo della funzione è M=(0;a).

Il limite della funzione per $x \to \pm\infty$ è 0.
Studiamo la derivata prima e la derivata seconda.

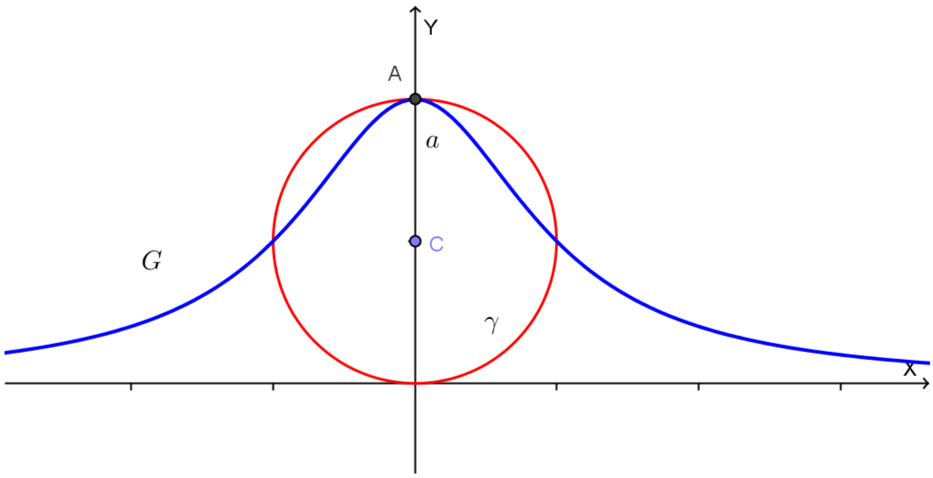
$$y' = \frac{-2ax}{(1+x^2)^2} \geq 0\ \ se\ \ \ x \leq 0\ :\ \ \ x = 0\ \ punto\ di\ massimo\ relativo\ e\ assoluto\ .$$

$$y'' = \frac{-2a(1+x^2)^2 + 2ax[4x(1+x^2)]}{(1+x^2)^4} \geq 0\ \ se\ \ \ (1+x^2)[-2a(1+x^2) + 8ax^2] \geq 0$$

$-1 - x^2 + 4x^2 \geq 0$, $3x^2 \geq 1$, $x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ vel $x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

Quindi il grafico G volge la concavità verso l'alto se $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ vel $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ e verso il basso se $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ sono punti di flesso , con ordinata: $y_F = \frac{a}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

Il grafico della funzione è il seguente:



Scriviamo l'equazione della circonferenza γ di diametro OA, essendo A=(0;a).
La circonferenza ha centro $C = \left(0; \frac{a}{2}\right)$ e raggio $R = \frac{a}{2}$. La sua equazione è quindi:

$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$, $\boldsymbol{x^2 + y^2 - ay = 0}$ **.**

3)

Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza γ e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.

Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = \dfrac{a}{1+x^2} \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + \left(\frac{a}{1+x^2}\right)^2 - a\left(\frac{a}{1+x^2}\right) = 0 \, ,$$

$x^2(1+x^2)^2 + a^2 - a^2(1+x^2) = 0$, $x^2(1+2x^2+x^4) + a^2 - a^2 - a^2x^2 = 0$,

$x^6 + 2x^4 + (1-a^2)x^2 = 0$, $x^2(x^4 + 2x^2 + 1 - a^2) = 0$ da cui:

$x = 0$ $doppia$ (la curva e la circonferenza sono tangenti in (0;a);

$x^4 + 2x^2 + 1 - a^2 = 0$; posto $x^2 = t$ otteniamo: $t^2 + 2t + 1 - a^2 = 0$ che ha:

$\frac{\Delta}{4} = 1 - 1 + a^2 = a^2$ quindi: $t = -1 \pm a$; quindi $x^2 = -1 - a \quad mai$,

$x^2 = -1 + a$ accettabile se $-1 + a \geq 0 \quad cioè \quad a \geq 1$, $a \geq 1$ $(ricordiamo\ che\ a > 0)$;

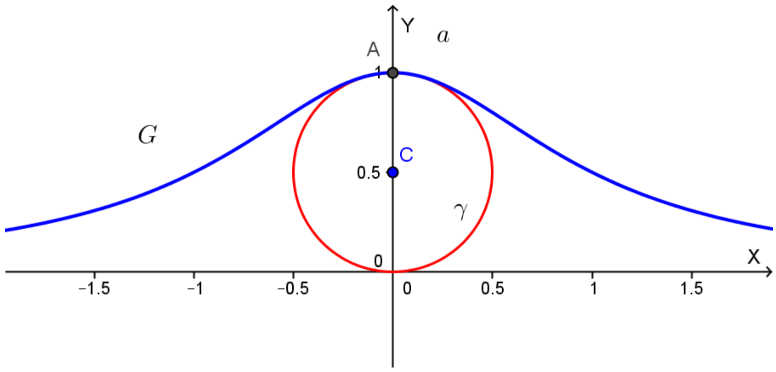
Per $a \geq 1$ si ha $x = \pm\sqrt{a-1}$. Pertanto:

se $a > 1$: la curva G e la circonferenza hanno in comune i punti che si ottengono per

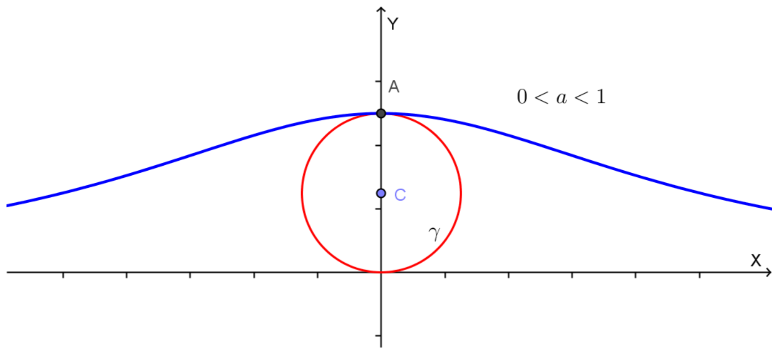
$x = 0$ $(soluzione\ doppia)$ e per $x = \pm\sqrt{a-1}$; i punti hanno coordinate:

$(0; a)\ doppio$; $\left(\pm\sqrt{a-1}; 1\right)$ (si veda il grafico del punto 2).

Se $a = 1$ abbiamo le soluzioni $(0; 1)$ $quadrupla$.



Se $0 < a < 1$ abbiamo solo la soluzione $(0; a)$ $doppia$.

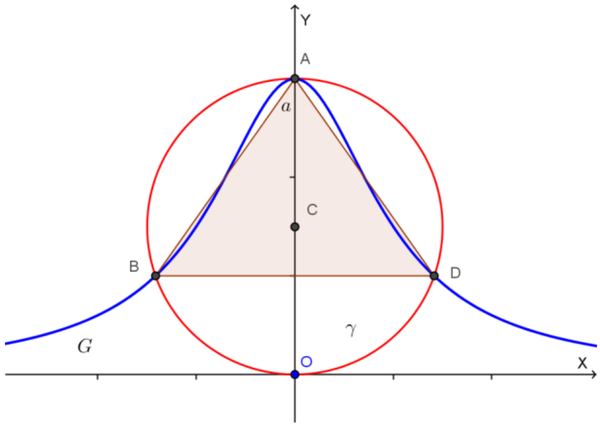


4)

Calcolare il valore $\bar{a}$ di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.

La circonferenza e la curva G hanno in comune tre punti, quindi siamo nel caso in cui $a > 1$ e, come visto nel punto precedente, le due curve hanno in comune i punti di coordinate:

$A = (0; a)\ ; \quad B = \left(-\sqrt{a-1}; 1\right)\ e\ \ D = \left(\sqrt{a-1}; 1\right)$.



Affinché il triangolo ABD, inscritto nella circonferenza di raggio $R = AC = \frac{a}{2}$, sia equilatero, l'altezza h del triangolo deve essere i 3/2 del raggio, quindi:

$h = a - 1 = \frac{3}{2} \cdot R = \frac{3}{2}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3}{4}a \quad da\ cui \quad 4a - 4 = 3a \quad quindi\ \ a = 4$.

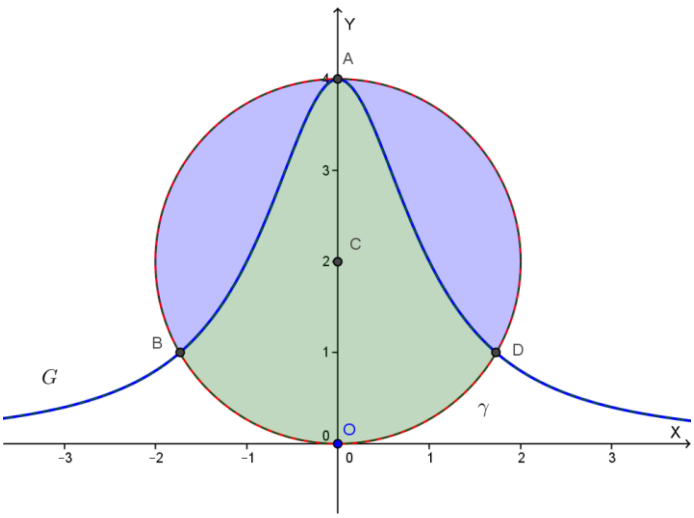
5)

Dopo aver controllato che il valore $\bar{a}$ sopraddetto è 4, indicare con $\bar{\gamma}$ e $\bar{G}$ la circonferenza e la curva corrispondenti a tale valore e calcolare le aree delle regioni piane in cui la curva $\bar{G}$ divide il cerchio delimitato da $\bar{\gamma}$.

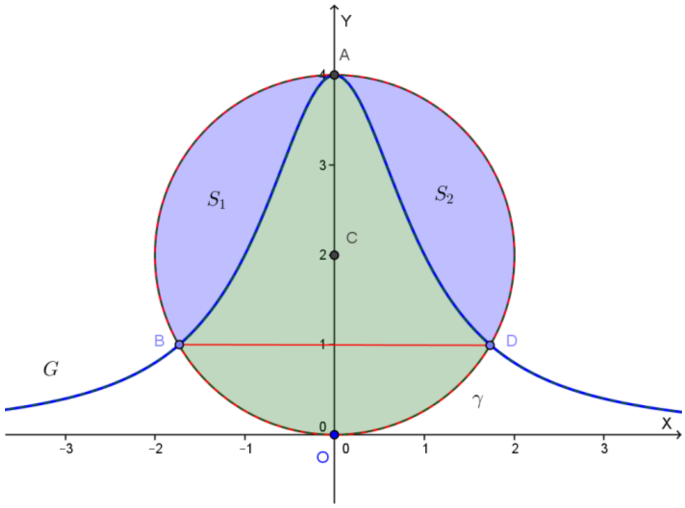
Con a=4 le due curve hanno le seguenti equazioni:

$\bar{\gamma}\colon\ x^2 + y^2 - 4y = 0,\ \ \bar{G}\colon\ y = \frac{4}{1+x^2}$

I grafici corrispondenti, con le regioni in cui curva $\bar{G}$ divide il cerchio delimitato da $\bar{\gamma}$ sono i seguenti:



Calcoliamo l'area S della regione compresa fra la curva $\bar{G}$ e la retta BC, che ha equazione y=1; notiamo che per a=4 l'ascissa di D è $\sqrt{a-1}=\sqrt{3}$.



$$S=2\int_0^{x_D}[f(x)-1]dx=2\int_0^{\sqrt{3}}\left[\frac{4}{1+x^2}-1\right]dx=2\left\{\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4}{1+x^2}dx-\int_0^{\sqrt{3}}dx\right\}=$$

$$=2\left\{[4arct(x)]_0^{\sqrt{3}}-[x]_0^{\sqrt{3}}\right\}=2\{4[arctg(\sqrt{3})-0]-\sqrt{3}\}=2\left\{4\cdot\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right\}=\frac{8}{3}\cdot\pi-2\sqrt{3}$$

La regione sotto la curva $\bar{G}$ e interna al cerchio si ottiene aggiungendo ad S l'area del segmento circolare BOD; quest'ultimo si ottiene sottraendo al settore circolare BCO (di ampiezza 120°) il triangolo di base BD e altezza 1; quindi:

$$Area(segmento\ circolare\ BOC)=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2^2-\frac{BD\cdot 1}{2}=\frac{4}{3}\cdot\pi-\frac{2\sqrt{3}\cdot 1}{2}=\frac{4}{3}\cdot\pi-\sqrt{3}$$

$$Area(ABOD)=S+\ Area(segmento\ circolare\ BOC)=\left(\frac{8}{3}\cdot\pi-2\sqrt{3}\right)+\left(\frac{4}{3}\cdot\pi-\sqrt{3}\right)=$$

$$=4\pi-3\sqrt{3}$$

$$S_1=S_2=\frac{Area(cerchio)-Area(ABOD)}{2}=\frac{4\pi-(4\pi-3\sqrt{3})}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri