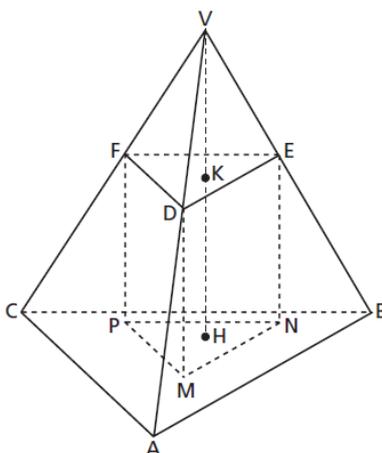


**PNI 2005 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 1**

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.



**A)**

AmMESSO di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Indicata con  $h$  l'altezza della piramide e con  $S$  l'area della base  $ABC$  risulta:

$$\text{Volume}(\text{piramide}) = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h$$

Risulta poi:  $VK = HK = h/2$ . Inoltre le aree dei triangoli  $ABC$  e  $DEF$  (che appartengono a piani paralleli) sono direttamente proporzionali ai quadrati delle distanze dei loro piani dal vertice  $V$ ; cioè:

$$\frac{A(ABC)}{A(DEF)} = \frac{VH^2}{VK^2} = \frac{h^2}{h^2/4} = 4 \quad \Rightarrow \quad A(DEF) = \frac{1}{4}A(ABC) = \frac{1}{4}S$$

Quindi:

$$\text{Volume}(\text{prisma}) = A(DEF) \cdot HK = \frac{1}{4}S \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{8} \cdot S \cdot h = \frac{3}{8} \cdot V(\text{piramide})$$

## B)

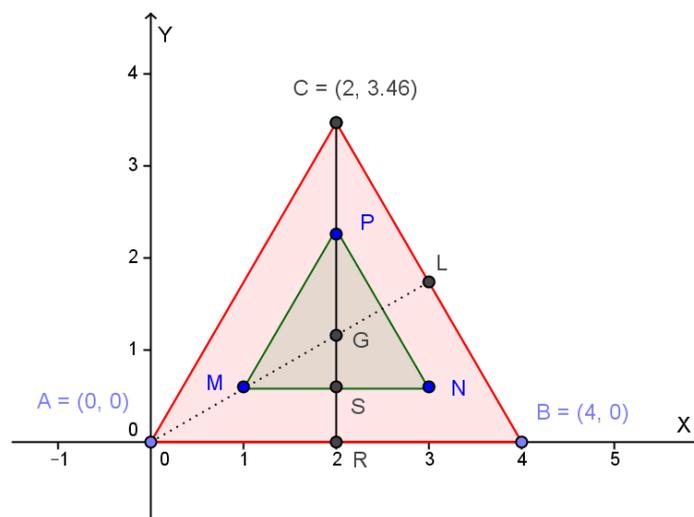
Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:

1. calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;
2. supposto che gli spigoli AB ed MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC ed MNP ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3. determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;
4. dopo aver spiegato perché la trasformazione che muta il triangolo ABC nel triangolo MNP è una similitudine, trovarne le equazioni;
5. spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

## B<sub>1</sub>)

Siccome il triangolo MNP è congruente al triangolo DEF e quest'ultimo, come visto nel punto precedente, è simile al triangolo ABC; essendo AH il doppio di HK, il rapporto di similitudine fra ABC ed MNP è 2, ciò vuol dire che il lato del triangolo MNP è la metà del lato del triangolo ABC: **lo spigolo della base MNP del prisma misura quindi 2 cm.**

## B<sub>2</sub>)



L'altezza CR del triangolo ABC vale:  $CR = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$  segue che:

$$A = (0; 0), \quad B = (4; 0), \quad C = (2; 2\sqrt{3}).$$

I due triangoli hanno lo stesso baricentro G (che è anche ortocentro, incentro e circocentro); per una nota proprietà del baricentro risulta  $CG = 2GR$ , quindi:

$GR = \frac{1}{3}CR = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ; siccome i due triangoli sono simili, con rapporto di similitudine pari a 2,

risulta  $AG = 2MG$  e  $GR = 2GS$  da cui  $GS = SR = \frac{1}{2}GR = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; pertanto:

$$M = \left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad N = \left(3; \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Inoltre risulta:  $PG = 2GS = \frac{2}{3}\sqrt{3}$  da cui  $PR = PG + GR = 2GS + 2GS = 4GS = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ .

Possiamo così trovare le coordinate di P:  $P = \left(2; \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ .

### B<sub>3</sub>)

La parabola richiesta ha equazione del tipo  $y = ax^2 + bx + c$ , ha per asse la retta di equazione  $x = 2$  e passa per  $A = (0; 0)$ ,  $B = (4; 0)$ ,  $M = \left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ .

Passaggio per A:  $c = 0$ ;

asse  $x=2$ :  $-\frac{b}{2a} = 2$  da cui  $b = -4a$

passaggio per M:  $\frac{\sqrt{3}}{3} = a + b + c$

Quindi:

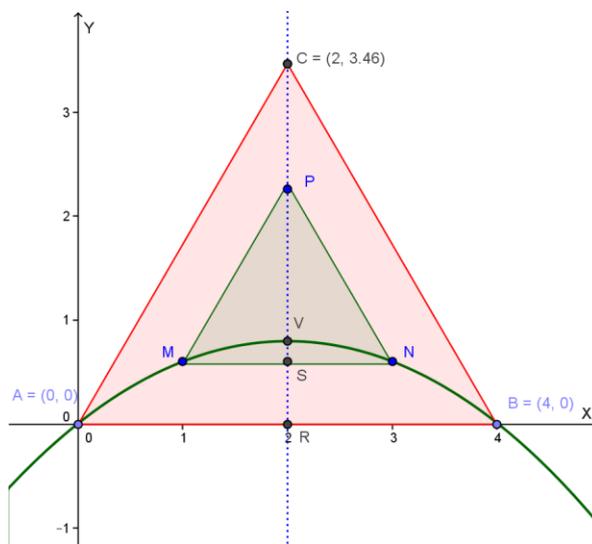
$$\begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ a + b + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ -3a = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ a = -\frac{\sqrt{3}}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} c = 0 \\ b = \frac{4}{9}\sqrt{3} \\ a = -\frac{\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

La parabola ha quindi equazione:

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{9}x^2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}x = -\frac{\sqrt{3}}{9}(x^2 - 4x)$$

Essendo N simmetrico di M rispetto all'asse della parabola, la parabola passerà anche per N; verifichiamolo analiticamente sostituendo le coordinate di N nell'equazione della parabola:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{9} \cdot 9 + \frac{4}{9}\sqrt{3} \cdot 3 = -\sqrt{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$



#### B<sub>4</sub>)

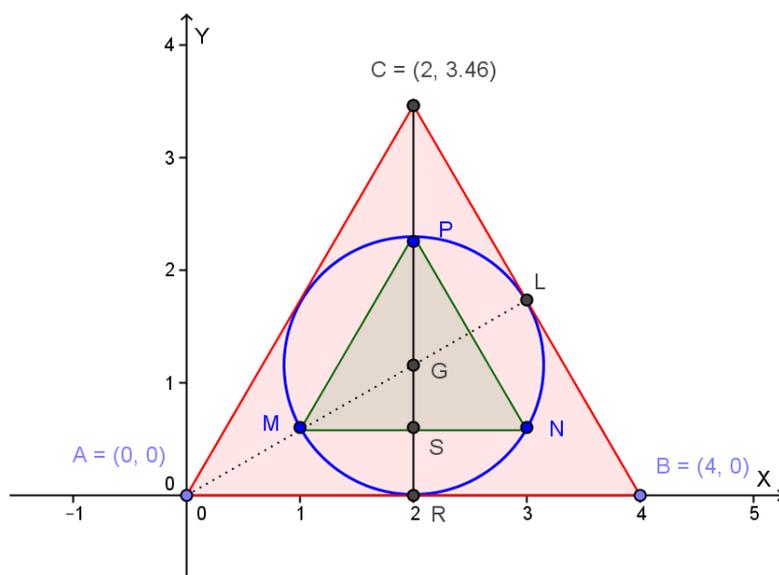
Il triangolo ABC viene mutato nel triangolo MNP mediante un'omotetia (quindi una similitudine) di centro G (si veda il punto B<sub>2</sub>) e rapporto  $k=1/2$ .

Notato che  $G = \left(2; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$  e  $k = \frac{1}{2}$ , le equazioni della similitudine (omotetia) sono:

$$\begin{cases} x' - x_G = k(x - x_G) \\ y' - y_G = k(y - y_G) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - 2 = \frac{1}{2}(x - 2) \\ y' - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(y - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

#### B<sub>5</sub>)

Come abbiamo già notato, il triangolo (equilatero) MNP ed il triangolo (equilatero) ABC hanno lo stesso circocentro, quindi la circonferenza circoscritta ad MNP ha centro in G (v. figura del punto B<sub>2</sub>) e raggio GM; ma GM=GR, quindi questa circonferenza è quella inscritta nel triangolo ABC.



Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri