PNI 2005 SESSIONE SUPPLETIVA - PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$, *dove a è un parametro reale non nullo.*

1)

Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ *è limitata.*

Una funzione di equazione $y = f(x)$ si dice limitata se esistono due numeri reali A e B tali che: $A \le f(x) \le B\ ,\ \ \forall x\ appartenente\ al\ dominio\ della\ funzione$.

La funzione di equazione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$ è definita su tutto R; siccome $1 + x^2 \ge 1$ si ha che:

$\frac{1}{1+x^2} \le 1$; pertanto:

$|f_a(x)| = \left|\frac{a}{1+x^2}\right| = |a| \cdot \frac{1}{1+x^2} \le |a|$ e ciò equivale a dire $-|a| \le f_a(x) \le |a|$, quindi la funzione è limitata.

2)

Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) ed indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando a>0, scrivere l'equazione della circonferenza γ *di diametro OA.*

Studiamo la funzione $y = f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$ per a>0.

Si tratta di una funzione pari, definita per ogni x reale, positiva su tutto il dominio, che è massima quando $1 + x^2$ è minimo, cioè per x=0; il massimo della funzione è M=(0;a).

Il limite della funzione per $x \to \pm\infty$ è 0.
Studiamo la derivata prima e la derivata seconda.

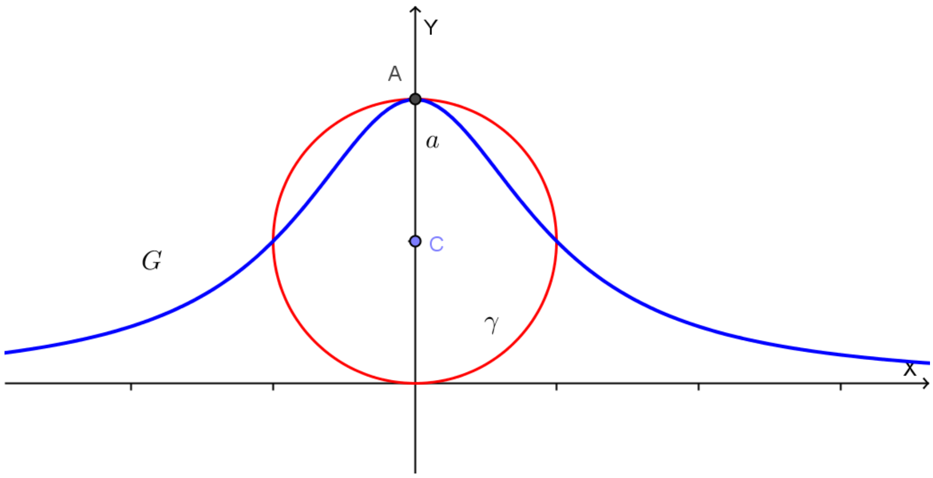
$$y' = \frac{-2ax}{(1+x^2)^2} \ge 0\ \ se\ \ \ x \le 0\ :\ \ \ x = 0\ \ punto\ di\ massimo\ relativo\ e\ assoluto\ .$$

$$y'' = \frac{-2a(1+x^2)^2 + 2ax[4x(1+x^2)]}{(1+x^2)^4} \ge 0\ \ se\ \ (1+x^2)[-2a(1+x^2) + 8ax^2] \ge 0$$

$-1 - x^2 + 4x^2 \geq 0$, $\quad 3x^2 \geq 1$, $\quad x \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \quad vel \quad x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Quindi il grafico G volge la concavità verso l'alto se $x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad vel \quad x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ e verso il basso se $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ sono punti di flesso , con ordinata: $y_F = \frac{a}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

Il grafico della funzione è il seguente:



Scriviamo l'equazione della circonferenza γ di diametro OA, essendo A=(0;a).

La circonferenza ha centro $C = \left(0; \frac{a}{2}\right)$ e raggio $R = \frac{a}{2}$. La sua equazione è quindi:

$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$, $\qquad$ $\boldsymbol{x^2 + y^2 - ay = 0}$ **.**

3)

Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza γ e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.

Risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = \dfrac{a}{1 + x^2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \left(\frac{a}{1 + x^2}\right)^2 - a\left(\frac{a}{1 + x^2}\right) = 0 \,,$$

$x^2(1 + x^2)^2 + a^2 - a^2(1 + x^2) = 0$, $\quad x^2(1 + 2x^2 + x^4) + a^2 - a^2 - a^2x^2 = 0$,

$x^6 + 2x^4 + (1 - a^2)x^2 = 0$, $\quad x^2(x^4 + 2x^2 + 1 - a^2) = 0$ da cui:

$x = 0 \quad doppia$ (la curva e la circonferenza sono tangenti in (0;a);

$x^4 + 2x^2 + 1 - a^2 = 0$; posto $x^2 = t$ otteniamo: $t^2 + 2t + 1 - a^2 = 0$ che ha:

$\frac{\Delta}{4} = 1 - 1 + a^2 = a^2$ quindi: $t = -1 \pm a$; quindi $x^2 = -1 - a \quad mai$,

$x^2 = -1 + a$ accettabile se $-1 + a \geq 0 \quad cioè \quad a \geq 1 \ , \ a \geq 1 \ (ricordiamo\ che\ a > 0)$;

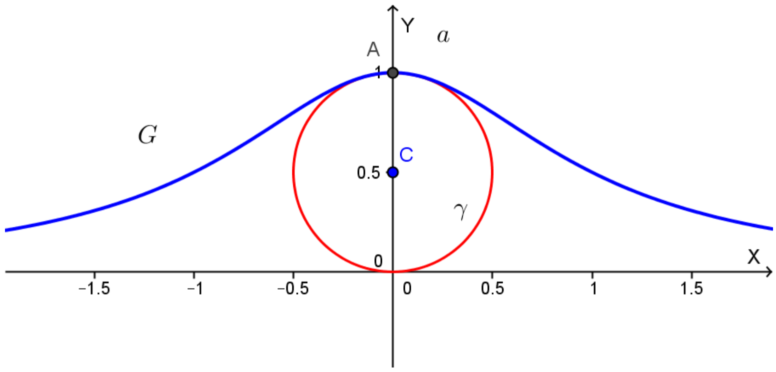
Per $a \geq 1$ si ha $x = \pm\sqrt{a-1}$. Pertanto:

se $a > 1$: la curva G e la circonferenza hanno in comune i punti che si ottengono per

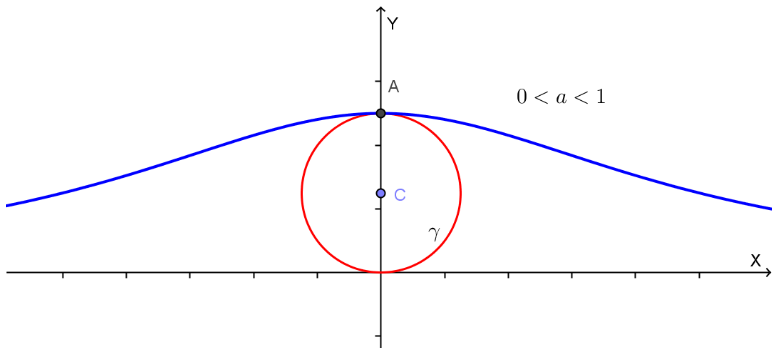
$x = 0 \ (soluzione\ doppia)$ e per $x = \pm\sqrt{a-1}$; i punti hanno coordinate:

$(0; a)\ doppio; \quad \left(\pm\sqrt{a-1}; 1\right)$ (si veda il grafico del punto 2).

Se $a = 1$ abbiamo le soluzioni $(0; 1) \quad quadrupla$.



Se $0 < a < 1$ abbiamo solo la soluzione $(0; a) \quad doppia$.

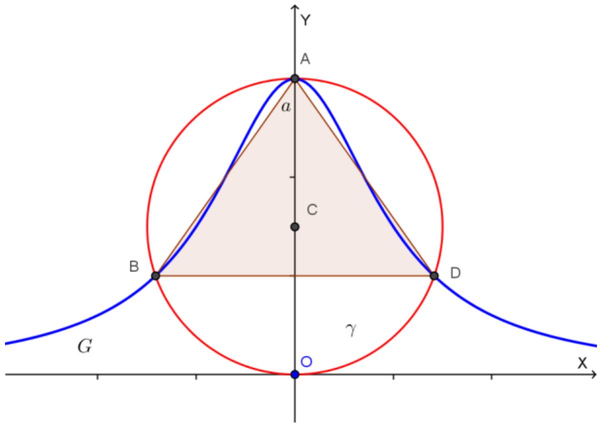


4)

Calcolare il valore $\bar{a}$ di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.

La circonferenza e la curva G hanno in comune tre punti, quindi siamo nel caso in cui $a > 1$ e, come visto nel punto precedente, le due curve hanno in comune i punti di coordinate:

$A = (0; a)\ ; \quad B = \left(-\sqrt{a-1}; 1\right)\ e\ \ D = \left(\sqrt{a-1}; 1\right)$.



Affinché il triangolo ABD, inscritto nella circonferenza di raggio $R = AC = \frac{a}{2}$, sia equilatero, l’altezza h del triangolo deve essere i 3/2 del raggio, quindi:

$h = a - 1 = \frac{3}{2} \cdot R = \frac{3}{2}\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{3}{4}a \quad da\ cui \quad 4a - 4 = 3a \quad quindi\ \ a = 4$.

5)

Verificare che esiste un valore a' di a per il quale la funzione si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

$y = f_a(x) = \frac{a}{1+x^2} \quad con \quad a > 0$

si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua se:

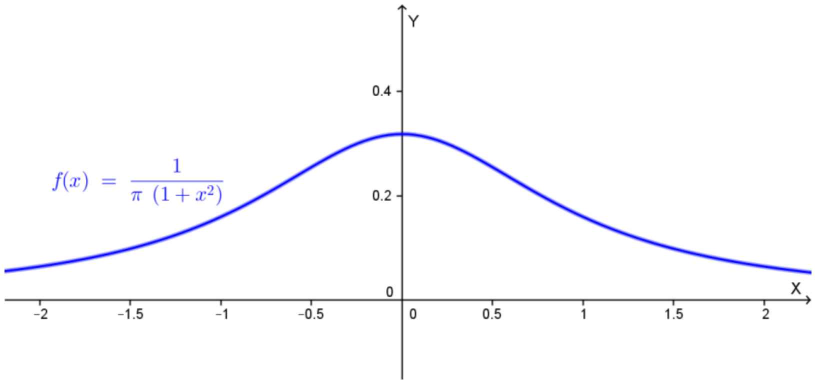
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = 1 \quad equivalente\ a \quad \int_0^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{a}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} [a \cdot arctg(x)]_0^b = a \cdot \lim_{b\to+\infty} [arctg(b)] = a \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$a \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \quad se \quad a = \frac{1}{\pi}$$

Quindi la funzione si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua se $a = \frac{1}{\pi}$.

Il grafico della funzione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ è il seguente:



La funzione di distribuzione della variabile aleatoria X è data da:

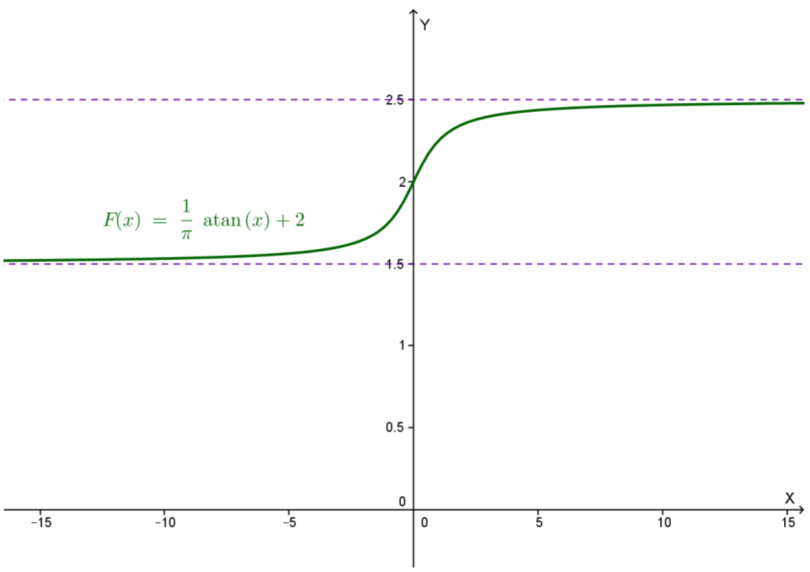
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{x} \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{a \to -\infty} [arctg(t)]_a^x = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{a \to -\infty} [arctg(x) - arctg(a)] = \frac{1}{\pi} \cdot \left(arctg(x) + \frac{\pi}{2}\right)$$

Quindi:

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(arctg(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi} arctg(x) + 2$$

Il grafico della funzione di distribuzione è il seguente:



Con la collaborazione di Angela Santamaria, Simona Scoleri e Stefano Scoleri