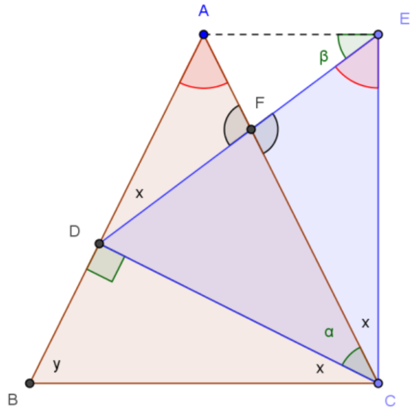
PNI 2005 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 1

Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.



a)

Dimostrare che:

1) *EC è perpendicolare a CB;*
2) *i triangoli EFC e AFD – dove F è il punto comune ai segmenti ED e AC – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli AEF e FCD sono congruenti;*
3) *EA è parallela a CB;*
4) *il quadrilatero AECD è inscrivibile in una circonferenza.*

1) Dalla similitudine fra i triangoli ECD ed ABC segue che l'angolo ECD è congruente all'angolo ABC; quindi l'angolo ECA=x è congruente all'angolo BCD=x. Ma risulta: $\alpha + x = y \quad ed \quad x + y = \frac{\pi}{2}\ ,\ quindi: x + \alpha + x = \frac{\pi}{2}$ segue che EC è perpendicolare a BC.

2) Dato che gli angoli DAF e DEC sono congruenti (essendo i triangoli ABC e CDE simili), essendo gli angoli AFD e CFE congruenti perché opposti al vertice, segue che il triangoli AFD ed EFC sono simili. Da questa similitudine segue la seguente proporzione: AF:FE=DF:FC . Ma l'angolo AFE è congruente all'angolo DFC, quindi i triangoli EFA e CFD sono simili poiché hanno un angolo congruente ed i lati che lo comprendo proporzionali. Siccome AF e DF si corrispondono nella similitudine tra EFA e CFD, segue che gli angoli corrispondenti (AEF ed FCD) sono congruenti.

3) Siccome α è complementare di DAC, anche l'angolo AEF, congruente ad α è complementare di AEF, quindi anche dell'angolo congruente CED: segue che AE è perpendicolare ad EC, quindi AE è parallela a CB.

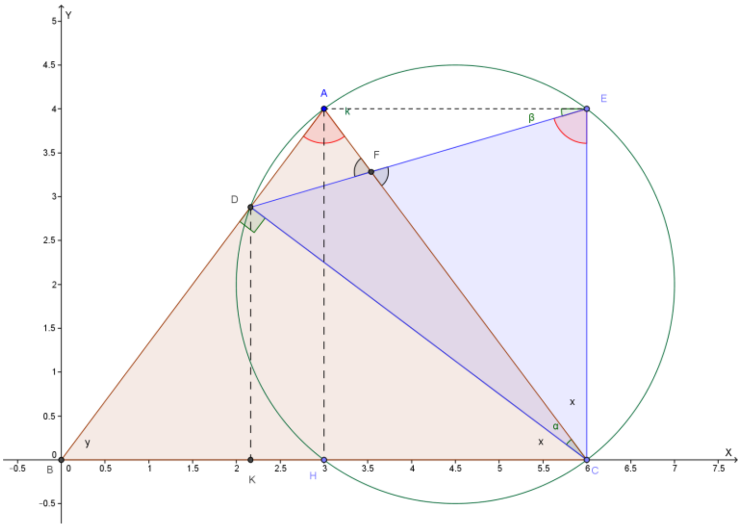
4) Ricordiamo che un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se, e solo se, gli angoli opposti sono supplementari. Nel nostro caso gli angoli opposti AEC e ADC sono retti, quindi supplementari; di conseguenza anche gli altri due lati opposti, DAE e DCE sono supplementari (la somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è due angoli piatti): il quadrilatero AECD è quindi inscrivibile in una circonferenza.

b)

Ammesso che le misure di BC e CD, rispetto a un'assegnata unità di misura, siano 6 e 24/5, dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:

1) *Il seno ed il coseno dell'angolo BCD;*
2) *le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo EDC.*

Un conveniente sistema di riferimento è quello con l'origine degli assi in B, asse x coincidente con la retta BC e asse y coincidente con la retta perpendicolare in B a BC:



Dai dati forniti si calcola BD:

$$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \sqrt{36 - \frac{576}{25}} = \sqrt{\frac{324}{25}} = \frac{18}{5}$$

Quindi, indicato con x l'angolo BCD, risulta:

$$senx = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{18}{5}}{6} = \frac{3}{5}, \qquad cosx = \frac{CD}{BC} = \frac{\frac{24}{5}}{6} = \frac{4}{5}$$

Cerchiamo ora le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo EDC.

Siccome ABC ed EDC hanno i vertici corrispondenti che si susseguono nello stesso verso (antiorario) la similitudine richiesta è diretta; le sue equazioni sono quindi del tipo:

$$\begin{cases} x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q \end{cases}$$

I coefficienti delle equazioni si ottengono imponendo che si corrispondano i punti A ed E, B e D, C e C:

Osserviamo ora che i triangoli BCD e ABH sono simili, quindi;

AH:BH=CD:BD, AH:3=24/5:18/5, AH=4.

Segue che $A = (3;4)$

Calcoliamo DK per trovare l'ordinata di D; essendo l'altezza relativa all'ipotenusa del triangolo rettangolo ACD risulta:

$$DK = \frac{BD \cdot DC}{BC} = \frac{\frac{18}{5} \cdot \frac{24}{5}}{6} = \frac{72}{25}$$

Per trovare l'ascissa BK di D applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo BDK:

$$BK = \sqrt{BD - KD^2} = \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - \left(\frac{72}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{324}{25} - \frac{5184}{625}} = \sqrt{\frac{2916}{625}} = \frac{54}{25}$$

Le coordinate dei punti richiesto sono pertanto:

$A = (3;4), \quad B = (0;0), \quad C = (6;0), \quad D = \left(\frac{54}{25};\frac{72}{25}\right), \quad E = (6;4).$

Imponiamo ora che ai vertici del triangolo ABC corrispondano rispettivamente i vertici del triangolo EDC.

$A = (3;4) \quad \to \quad E = (6;4)$ quindi:

$$\begin{cases} x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 6 = 3a - 4b + p \\ 4 = 3b + 4a + q \end{cases}$$

$B = (0;0) \quad \to \quad D = \left(\frac{54}{25};\frac{72}{25}\right) \quad quindi:$

$$\begin{cases} \frac{54}{25} = p \\ \frac{72}{25} = q \end{cases}$$

$C=(6;0) \quad \rightarrow \quad C=(6;0)$

$\begin{cases} 6=6a+p \\ 0=6b+q \end{cases}$ Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} 6=3a-4b+p \\ 4=3b+4a+q \\ \frac{54}{25}=p \\ \frac{72}{25}=q \\ 6=6a+p \\ 0=6b+q \end{cases} ; \quad \begin{cases} 6=3a-4b+\frac{54}{25} \\ 4=3b+4a+\frac{72}{25} \\ \frac{54}{25}=p \\ \frac{72}{25}=q \\ 6=6a+\frac{54}{25} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{16}{25} \\ 0=6b+\frac{72}{25} \quad \Rightarrow \quad b=-\frac{12}{25} \end{cases} ; \quad \begin{cases} 6=\frac{48}{25}+\frac{48}{25}+\frac{54}{25} \\ 4=-\frac{36}{25}+\frac{64}{25}+\frac{72}{25} \\ \frac{54}{25}=p \\ \frac{72}{25}=q \\ a=\frac{16}{25} \\ b=-\frac{12}{25} \end{cases}$$

La similitudine ha quindi equazioni:

$$\begin{cases} x'=\frac{16}{25}x+\frac{12}{25}y+\frac{54}{25} \\ y'=-\frac{12}{25}x+\frac{16}{25}y+\frac{72}{25} \end{cases}$$

Notiamo che il rapporto di similitudine è:

$$k=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^2+\left(-\frac{12}{25}\right)^2}=\frac{4}{5}$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria