PNI 2005 – SESSIONE STRAORDINARIA - PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

[1] $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c.$

a)

Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.

Cerchiamo il punto d'intersezione con l'asse y.
Ponendo $x = 0$ in [1] otteniamo: $A = (0; c)$.
Indicata con y=f(x) l'equazione della generica curva, abbiamo:

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx\,,\quad da\ cui\colon\ f'(0) = 0$

La tangente in A ha quindi equazione: $y - c = f'(0)(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = c$. Quindi la tangente in A è parallela all'asse x per tutte le curve.

b)

Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.

Calcoliamo la derivata seconda della funzione:

$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b > 0 \quad per\ ogni\ x\ se\ il\ delta\ è\ negativo$, quindi:

$\frac{\Delta}{4} = 9a^2 - 24b < 0\,,\quad 3a^2 - 8b < 0\,.$

La concavità potrebbe essere rivolta verso le y positive anche se la derivata seconda si annulla in un punto, in tal caso bisogna analizzare la derivata prima o le derivate successive. La derivata seconda si annulla in un punto se $3a^2 - 8b = 0$, ed il punto in questione è: $x = -\frac{3a}{12} = -\frac{a}{4}$.
La derivata terza della funzione è:
$f'''(x) = 24x + 6a$; valutiamola in $x = -\frac{a}{4}$: $f'''\left(-\frac{a}{4}\right) = -6a + 6a = 0$. Quindi non possiamo dire niente. Analizziamo la derivata quarta:
$f^{iv}(x) = 24 > 0$: quini la prima derivata che non si annulla in $x = -\frac{a}{4}$ è di ordine pari, pertanto in tale non abbiamo un flesso (in particolare abbiamo un minimo, poiché la

derivata terza è positiva): quindi anche quando $3a^2 - 8b = 0$ il grafico della funzione volge la concavità verso le y positive. Concludendo:

la curva data volge la concavità verso le y positive se $3a^2 - 8b \leq 0$

c)

Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate (2; 2).

Il punto in cui la curva taglia l'asse y è il punto $A = (0; c)$. Affinché in tale punto ci sia un flesso è necessario che la derivata seconda si annulli:
$f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$.
La tangente inflessionale in A ha equazione:

$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y - c = 0(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = c$. Tale retta passa per (2;2) se c=2. Inoltre la curva deve passare per (2;2), quindi:

$2 = 16 + 8a + 4b + c, da\ cui, essendo\ b = 0\ e\ c = 2{:}\ a = -2$. Quindi:

$a = -2, b = 0\ e\ c = 2 \quad \Rightarrow \quad y = x^4 - 2x^3 + 2$

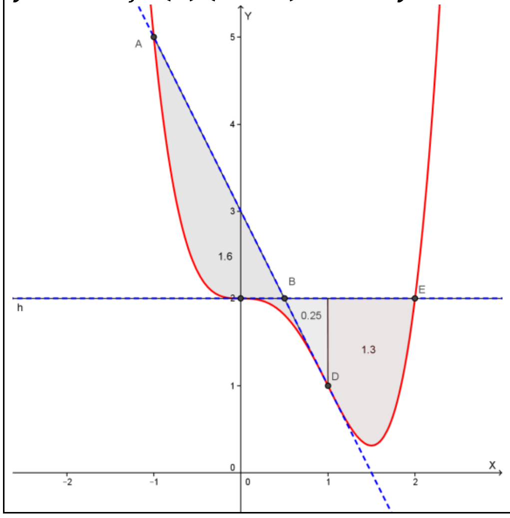
d)

Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

Abbiamo già visto nel punto precedente che la curva presenta, oltre al flesso (0;2) il flesso (1;1).

La tangente in (0;2) ha equazione y=2, trattandosi, come già osservato, di un flesso a tangente orizzontale. La tangente in (1;1) ha equazione:

$y - 1 = f'(1)(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y - 1 = -2(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 3$



La regione delimitata dalle due tangenti inflessionali e dalla curva K è indicata nella seguente figura:

Cerchiamo l'ascissa dell'intersezione A fra K e la tangente in (1;1):

$$\begin{cases} y = x^4 - 2x^3 + 2 \\ y = -2x + 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$$

$$x^4 - 1 - 2x(x^2 - 1) = 0, \qquad (x^2 - 1)(x^2 + 1 - 2x) = 0$$

$(x+1)(x-1)^3 = 0, \qquad quindi \;\; x_A = -1$

Cerchiamo l'ascissa di B intersecando le due tangenti inflessionali: se y=2 si ha x=1/2.

L'area richiesta si ottiene quindi nel seguente modo:

$$\int_{-1}^{1} [-2x + 3 - (x^4 - 2x^3 + 2)]\, dx + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \int_{1}^{2} [2 - (x^4 - 2x^3 + 2)]\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (-x^4 + 2x^3 - 2x + 1)\, dx + \frac{1}{4} + \int_{1}^{2} (-x^4 + 2x^3)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} - x^2 + x\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{4} + \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2}\right]_{1}^{2} = \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - 1 + 1\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - 1 - 1\right) + \frac{1}{4} +$$

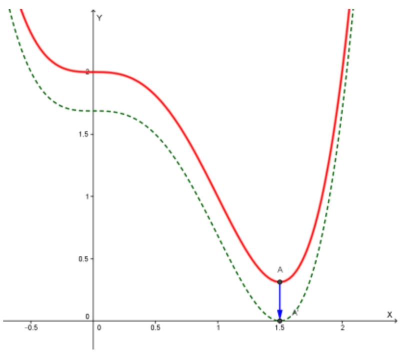
$$+ \left(-\frac{32}{5} + 8\right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{63}{20}\, u^2 = 3.15\, u^2$$

e)

Determinare le equazioni della traslazione che, lasciando sull'asse y il flesso di K con tangente orizzontale, porti il minimo di K sull'asse x.

Determiniamo le coordinate del minimo di K. La funzione ha equazione:
$y = x^4 - 2x^3 + 2$
Risulta: $y' = 4x^3 - 6x^2 \geq 0 \;\; se \;\; x^2(2x - 3) \geq 0$ quindi, tenendo presente quanto già visto nei punti precedenti, il minimo si ha per $x = \frac{3}{2}$ ed ha ordinata: $\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 2 = \frac{5}{16}$
Se il flesso con tangente orizzontale deve rimanere sull'asse y ed il minimo di coordinate $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{16}\right)$ deve andare sull'asse x, le equazioni della traslazione sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - \dfrac{5}{16} \end{cases}$$



Con la collaborazione di Angela Santamaria