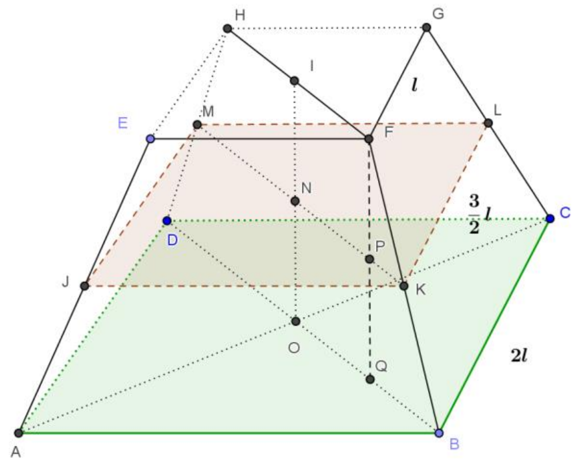
PNI 2005 – SESSIONE STRAORDINARIA - QUESITI

QUESITO 1

Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano a equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α.



Se la base maggiore ha area quadrupla della base minore, il suo lato è il doppio di quello della base minore. Posto $FG = l\ ,\ risulta\ \ BC = 2l$

La proiezione di F sulla base maggiore incontra OB nel punto medio Q (essendo OB il doppio di IF ed OQ=IF). Indicata con P l'intersezione fra FQ ed NK, dalla similitudine fra i triangoli FPK ed FQB si ha:

$BQ{:}PK = FQ{:}FP = 2$, quindi: $PK = \frac{1}{2}BQ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}OB\right) = \frac{1}{2}IF,\ quindi{:}$

$$NK = NP + PK = IF + \frac{1}{2}IF = \frac{3}{2}IF. Segue\ che{:} KL = \frac{3}{2}l$$

Passiamo quindi a calcolare i volumi dei due tronchi di piramide, ponendo per comodità $IN = NO = h$. Il tronco di basi ABCD e JKLM ha volume:

$$V_1 = \frac{1}{3}\left(BC^2 + KL^2 + \sqrt{BC^2 \cdot KL^2}\right) \cdot h = \frac{1}{3}\left(4l^2 + \frac{9}{4}l^2 + 2l \cdot \frac{3}{2}l\right)h = \frac{1}{3}h\left(\frac{37}{4}l^2\right) =$$
$$= \frac{37}{12}hl^2 = V_1$$

Calcoliamo ora il volume del tronco di piramide di basi JKLM ed EFGH:

$$V_2 = \frac{1}{3}\left(FG^2 + KL^2 + \sqrt{FG^2 \cdot KL^2}\right) \cdot h = \frac{1}{3}\left(l^2 + \frac{9}{4}l^2 + l \cdot \frac{3}{2}l\right)h = \frac{1}{3}h\left(\frac{19}{4}l^2\right) =$$

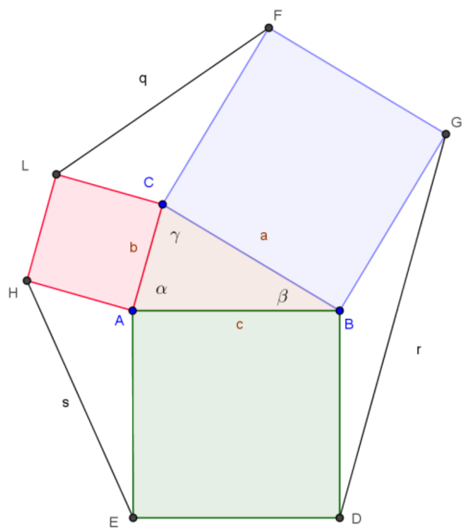
$$= \frac{19}{12}hl^2 = V_2$$

Il rapporto fra i volumi dei due tronchi è pertanto calcolabile ed è:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{37}{12}hl^2}{\frac{19}{12}hl^2} = \frac{37}{19}$$

QUESITO 2

Sia ABC un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente ad esso si costruiscano i tre quadrati ABDE, BCFG e CAHL. Dimostrare, col metodo preferito, che i triangoli AHE, BDG e CFL sono equivalenti al triangolo ABC.



Calcoliamo le aree dei triangoli in oggetto mediante la trigonometria, secondo cui *l'area di un triangolo è uguale al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso*.

$$A(AHE) = \frac{1}{2}bc \cdot sen(EAH) = \frac{1}{2}bc \cdot sen(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}bc \cdot sen(\alpha) = A(ABC)$$

$$A(BDG) = \frac{1}{2}ac \cdot sen(DBG) = \frac{1}{2}ac \cdot sen(\pi - \beta) = \frac{1}{2}ac \cdot sen(\beta) = A(ABC)$$

$$A(CFL) = \frac{1}{2}ab \cdot sen(FCL) = \frac{1}{2}ab \cdot sen(\pi - \gamma) = \frac{1}{2}ab \cdot sen(\gamma) = A(ABC)$$

QUESITO 3

Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente:

$$log_2 27 + log_2 12 \ , \quad 2 + log_2 81$$

Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.

Risultato Luca: $log_2 27 + log_2 12 \ = log_2 3^3 + log_2 3 \cdot 4 = \ 3\,log_2 3 + log_2 3 + log_2 4 =$

$= 4\,log_2 3 + log_2 2^2 = 4\,log_2 3 + 2\,log_2 2 = 4\,log_2 3 + 2$

Risultato Claudia: $2 + log_2 81 = 2 + log_2 3^4 = 2 + 4\,log_2 3$

Quindi i risultati ottenuti da Luca e Claudia sono uguali.

QUESITO 4

Dimostrare che ogni funzione del tipo $y = a\,sen^2 x + b\,senx\,cosx + c\cos^2 x$ *, dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?*

Ricordiamo che una funzione sinusoidale è riconducibile alla forma:

$y = A \cdot sen(\alpha x + \beta)$ (1)

Tenendo presenti le formule di bisezione e di duplicazione la funzione può essere scritta nella forma:

$$y = a\left(\frac{1 - cos2x}{2}\right) + \frac{1}{2} bsen2x + c\left(\frac{1 + cos2x}{2}\right) = \frac{1}{2}(a - a\,cos2x + bsen2x + c + c\,cos2x)$$

$$y = \frac{1}{2}[b\,sen2x + (c - a)cos2x + a + c]$$

Se b=0 e a=c (ma diversi da zero) la funzione si riduce alla retta di equazione:

$y = \frac{1}{2}(a + c)$, quindi non è una funzione sinusoidale.

La funzione data non è sinusoidale neanche quando $a + c \neq 0, cioè\ a \neq -c$.
Analogamente non è sinusoidale se $b = 0\ e\ c - a \neq 0$ oppure se $b = 0\ e\ c - a \neq 0$

In tutti gli altri casi la funzione si può ricondurre alla forma (1). Ricordiamo infatti che la funzione lineare in seno e coseno, di equazione $y = a\ senx + b\ cosx$ si può sempre ricondurre alla forma $y = A \cdot sen(x + \alpha)$ supponendo a>0 (altrimenti si raccoglie -1) ponendo $A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad e \quad \alpha = arctg\left(\frac{b}{a}\right)$.

QUESITO 5

Enunciare il principio d'induzione matematica e applicarlo alla dimostrazione della seguente relazione:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 \qquad (1)$$

la quale esprime una proprietà dei numeri naturali conosciuta come «teorema di Nicomaco » (da Nicomaco di Gerasa, filosofo e matematico ellenico, vissuto intorno all'anno 100 d.C.).

Consideriamo un proprietà P che dipende da un numero naturale n.
Il principio d'induzione afferma che:
se una proprietà P è vera per un numero naturale n_0 e, supposta vera per n si dimostra vera per n+1, allora la proprietà è vera per ogni $n \geq n_0$.

La proprietà da dimostrare è vera per i=1, infatti equivale a:

$1^3 = (1)^2$.

Supponiamo che la proprietà sia vera per n, cioè che valga la (1), e dimostriamo che è vera per n+1, cioè che:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2$$

Ricordiamo che la somma dei primi n numeri naturali è uguale a:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Risulta:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = [1^3 + 2^3 + \cdots + n^3] + (n+1)^3 =$$

$$= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 =$$

$$= (1+2+\cdots+(n+1))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} i\right)^2$$

QUESITO 6

Il limite della funzione $\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$ *per* $x \to +\infty$ *è:*

A) e B) $\frac{1}{e}$ C) $\sqrt{e}$ D) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

dove "e" è la base dei logaritmi naturali.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

Ricordando il limite notevole:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

La risposta corretta è quindi la C.

QUESITO 7

Calcolare la derivata, rispetto a x, della funzione: $\int_{-x}^{2x} \frac{dt}{sen\, t}$.

Ricordiamo che in base al teorema fondamentale del calcolo integrale ed al teorema sulla derivata della funzione composta si ha che:

$$D\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f'(x) \quad e \quad D\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right) = f(g(x))\cdot g'(x)$$

Notiamo che la funzione integranda non è continua se $x = k\pi$. Consideriamo un punto a compreso fra –x e 2x; risulta (sia per x>0 che per x<0):

$$\int_{-x}^{2x}\frac{dt}{sen\,t}=\int_{-x}^{a}\frac{dt}{sen\,t}+\int_{a}^{2x}\frac{dt}{sen\,t}=-\int_{a}^{-x}\frac{dt}{sen\,t}+\int_{a}^{2x}\frac{dt}{sen\,t}$$

$$D\left(\int_{-x}^{2x}\frac{dt}{sen\,t}\right)=-\frac{1}{sen(-x)}\cdot(-1)+\frac{1}{sen(2x)}\cdot 2=-\frac{1}{sen(x)}+\frac{2}{sen(2x)}=\frac{-cosx+1}{senxcosx}$$

QUESITO 8

Dopo aver spiegato, attraverso una dimostrazione o una interpretazione geometrica, perché l'equazione $x^3+x+1=0$ ammette una e una sola soluzione reale, esplicitare un algoritmo idoneo a calcolarne un valore approssimato.

Consideriamo la funzione di equazione:

$f(x)=x^3+x+1$

Trattandosi di una funzionale razionale intera di grado dispari essa si annulla almeno una volta. Calcoliamo la derivata prima:

$f'(x)=3x^2+1>0$ per ogni x, quindi la funzione è sempre crescente: si annulla pertanto solo una volta.

Quanto detto per la funzione permette di concludere che l'equazione data ammette una sola soluzione reale.

Per trovare un valore approssimato della radice dobbiamo prima isolarla, trovando un valore in cui la funzione è negativa ed un in cui è positiva. Per effettuare tale ricerca notiamo che per x=0 la funzione vale 1 e che per valori positivi di x è sempre positiva. Ponendo x= -1 la funzione vale – 1, quindi la radice richiesta è compresa fra -1 e 0.

Possiamo applicare, per esempio, il metodo di bisezione.

$f(x)=x^3+x+1$, $[a;b]=[-1;0]$; $f(a)=f(-1)=-1<0\,;f(b)=f(0)=1>0$

$c=\frac{a+b}{2}=\frac{-1+0}{2}=-0.5$; $f(-0.5)=0.38>0,$ $c\to b$, $[a;b]=[-1;-0.5]$

$c=\frac{a+b}{2}=\frac{-1-0.5}{2}=-0.75$; $f(-0.75)=-0.17<0, c\to a$, $[a;b]=[-0.75;-0.5]$

$c=\frac{a+b}{2}=\frac{-0.75-0.5}{2}=-0.63$; $f(-0.63)=0.13>0, c\to b$, $[a;b]=[-0.75;-0.63]$

Quindi la radice c dell'equazione data appartiene all'intervallo $(-0.75;-0.63)$
Indichiamo un programma in pascal che permette di trovare la radice con l'approssimazione voluta.
Funzione $f(x)=x^3+x+1$, per l'intervallo [-1;0], approssimazione 10^{-2}.

```
program bisezione;
Uses Crt;
Const    a=-1;
         b=0;
         n=2;

Var      c:real;
         risposta:char;

Procedure Presentazione;
Begin
  Writeln('Questo programma permette di calcolare la radice di ');
  writeln('X^3 +x+1 = 0       nell''intervallo [-1;0]');
  Writeln('a meno di 10 ^(-2) ');
  Writeln;writeln;
End;

Function  f(x:real):real;

Begin
  f:=x*x*x+x+1
End;

Procedure  Elabora;
Var   errore,x1,x2:real;
Begin
  errore:=exp(-2*ln(10));   (*10^(-2)*)
  x1:=a;        x2:=b;

  Repeat
    c:=(x1+x2)/2;
    If f(c)*f(x1)<0 then
    x2:=c  ELSE   x1:=c
  Until  (abs(x2-x1)<errore)  or  (f(c)=0)
end;

Procedure Comunica;
 Begin
  Writeln('La radice , con l''approssimazione richiesta: ',c:10:n);
  Writeln
 End;

BEGIN (*main*)
Repeat
 Clrscr;
 Presentazione;
 Elabora;
 Comunica;
 Write('Ancora? (s/n)  ');
 Readln(risposta);
Until risposta in ['n','N']
END.
```

Il programma può essere provato on line copiandolo nell’apposita finestra al seguente link*:*

http://www.tutorialspoint.com/compile_pascal_online.php

L’esito è il seguente:

Free Pascal Compiler version 2.6.4 [2015/03/25] for x86_64
Copyright (c) 1993-2014 by Florian Klaempfl and others
Target OS: Linux for x86-64

Questo programma permette di calcolare la radice di
X^3 +x+1 = 0   nell'intervallo [-1;0]
a meno di 10 ^(-2)

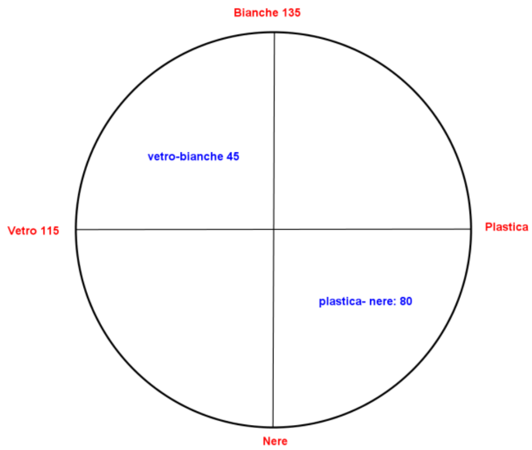
La radice , con l'approssimazione richiesta :   -0.68

Ancora? (s/n)

QUESITO 9

Un'urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 135 sono bianche, 115 di vetro; inoltre 45 palline di vetro sono bianche e 80 palline di plastica sono nere. Si estrae a caso una pallina: qual è la probabilità che sia nera e di vetro?

Rappresentiamo la situazione con un diagramma di Eulero-Venn:

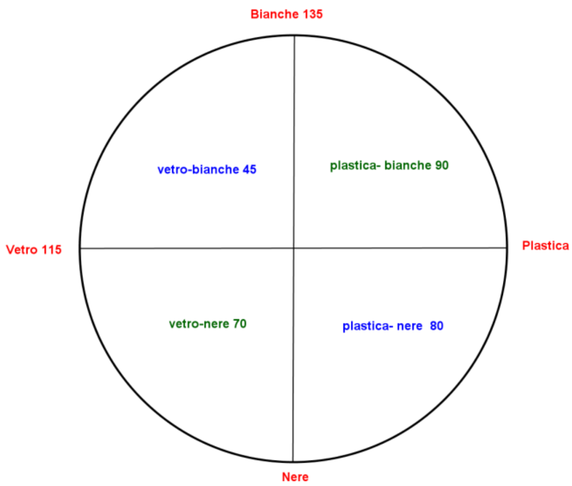


Le palline di vetro sono 115, di cui 45 bianche, quindi le palline di vetro nere sono 115-45=70.

Siccome le palline di plastica nere sono 80, le palline nere saranno 70+80=150.

Le palline bianche sono 135, di cui 45 di vetro, quindi le palline bianche di plastica sono 90.

La situazione completa è indicata nel grafico seguente:



Abbiamo in totale 285 palline, di cui 70 nere di vetro. La probabilità che una pallina estratta sia nera e di vetro è quindi:

$$p = \frac{70}{285} = \frac{14}{57} \cong 0.2456 \cong 25\ \%$$

QUESITO 10

Nelle ultime 10 estrazioni non è uscito il «47» sulla Ruota di Napoli. Qual è la probabilità che non esca neppure nelle prossime 10 estrazioni ed esca invece nell'11-esima estrazione?

La probabilità che ESCA il 47 sulla Ruota di Napoli è 5/90; la probabilità che NON ESCA è 85/90.
Il fatto che nelle ultime 10 estrazioni il 47 non sia uscito non condiziona l'esito delle successiva estrazioni. Calcoliamo quindi la probabilità che non esca per 10 volte ed esca l'undicesima volta:

$$p = \left(\frac{85}{90}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{90}\right) \cong 0.0314 \cong 31\ \%$$

Con la collaborazione di Angela Santamaria