Seconda prova scritta
SESSIONE STRAORDINARIA

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
a.s. 2004/2005
CORSO SPERIMENTALE BROCCA
Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.
Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.
a) Dimostrare che:
1) EC è perpendicolare a CB;
2) I triangoli EFC ed AFD – dove F è il punto comune ai segmenti ED ed AC – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti;
3) EA è parallela a CB;
4) Il quadrilatero AECD è inscrivibile in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di BC e CD, rispetto ad un'assegnata unità di misura, siano 6 e $\frac{24}{5}$, dopo aver riferito il piano della figura ad un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:
1) Il seno e il coseno dell'angolo $B\hat{C}D$;
2) Le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo ADC.

PROBLEMA 2.
Nel piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$[1] \quad y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c.$$

a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.

b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.

c) Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate (2, 2).

d) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

e) Determinare le equazioni della traslazione che, lasciando sull'asse y il flesso di K con tangente orizzontale, porti il minimo di K sull'asse x.

QUESTIONARIO.

1. Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano a equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α.

2. Sia ABC un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente ad esso si costruiscano i tre quadrati ABDE, BCFG e CAHL. Dimostrare, col metodo preferito, che i triangoli AHE, BDG e CFL sono equivalenti al triangolo ABC.

3. Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente:
$$\log_2 27 + \log_2 12, \quad 2 + \log_2 81.$$
Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.

4. Dimostrare che ogni funzione del tipo $y = a\,\text{sen}^2 x + b\,\text{sen}\,x\cos x + c\cos^2 x$, dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?

5. Enunciare il principio d'induzione matematica e applicarlo alla dimostrazione della seguente relazione:
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2,$$
la quale esprime una proprietà dei numeri naturali conosciuta come "*teorema di Nicomaco*" (da **Nicomaco di Gerasa**, filosofo e matematico ellenico, vissuto intorno all'anno 100 d.C.).

6. Il limite della funzione $\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$, per $x \to +\infty$, è:
$$[A]\ e;\ [B]\ \frac{1}{e};\ [C]\ \sqrt{e};\ [D]\ \frac{1}{\sqrt{e}},$$
dove "e" è la base dei logaritmi naturali.
Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

7. Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione: $\displaystyle\int_{-x}^{2x} \frac{dx}{\text{sen}\,x}$.

8. Dopo aver spiegato, attraverso una dimostrazione o una interpretazione geometrica, perché l'equazione $x^3 + x + 1 = 0$ ammette una ed una sola soluzione reale, esplicitare un algoritmo idoneo a calcolarne un valore approssimato.

9. Un'urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 135 sono bianche, 115 di vetro; inoltre 45 palline di vetro sono bianche e 80 palline di plastica sono nere. Si estrae a caso una pallina: qual è la probabilità che sia nera e di vetro?

10. Nelle ultime 10 estrazioni non è uscito il "47" sulla Ruota di Napoli. Qual è la probabilità che non esca neppure nelle prossime 10 estrazioni ed esca invece nell'11-esima estrazione?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.