Y557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:

1. calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;
2. supposto che gli spigoli AB ed MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC ed MNP ad un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
3. determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;
4. dopo aver spiegato perché la trasformazione che muta il triangolo ABC nel triangolo MNP è una similitudine, trovarne le equazioni;
5. spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

PROBLEMA 2.

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

1. Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2. Una volta riferito il piano ad un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) ed indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a>0$, scrivere l'equazione della circonferenza g di diametro OA.
3. Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza g e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4. Calcolare il valore $\overline{a}$ di a per il quale la circonferenza g e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5. Verificare che esiste un valore a' di a per il quale la funzione $f_{a'}(x)$ si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

QUESTIONARIO.

1. È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi.
   Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.
2. Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.
3. Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$.
   Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oppure $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ (k intero qualsiasi);
   Gianna trova la seguente soluzione: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ (k intero qualsiasi).
   È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no?
   Fornire una risposta esauriente.
4. Si consideri la seguente equazione in x: $(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$ dove k è un parametro reale diverso da 2.
   Indicate con x' ed x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x'+x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.
5. Il limite della funzione $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0$:
   [A] è uguale ad 1;
   [B] è uguale a $+\infty$;
   [C] non esiste;
   [D] è uguale ad e;
   [E] è uguale ad $\frac{1}{e}$,
   essendo "e" la base dei logaritmi naturali.
   Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.
6. Dimostrare che, se la derivata di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ è nulla per ogni x di un dato intervallo J, allora $f(x)$ è costante in J.
7. Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ non necessariamente ammette primitiva in $[a, b]$.
8. In un'urna ci sono due palline bianche, in una seconda urna ci sono due palline nere e in una terza urna ci sono una pallina bianca e una pallina nera. Scegli a caso un'urna ed estrai, sempre a caso, una delle due palline in essa contenute: è bianca. Saresti disposto a scommettere alla pari che la pallina rimasta nell'urna che hai scelto sia essa pure bianca?
9. Si consideri il seguente sistema nelle incognite x, y, z:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = a \end{cases}$$

dove a è un parametro reale.
Il sistema è:
[A] determinato per ogni valore di a;
[B] indeterminato per un valore di a ed impossibile per un valore di a;
[C] indeterminato per nessun valore di a, ma impossibile per un valore di a;
[D] impossibile per nessun valore di a, ma indeterminato per un valore di a.
Un sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

10. Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni:

    $x' = 2x + my - 1$

    $y' = mx - 2y - 2$

    dove m è un parametro reale.
    Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.